UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA
V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA
Ústav matematických vied

ZÁPISKY Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I.

študijný materiál k predmetu Matematická analýza I.

verzia 01/13

Košice 2013 doc. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.

Obsah

Trochu z histórie matematickej analýzy

Matematická analýza je na rozdiel od niektorých iných oblastí matematiky pomerne mladá, pretože vznikla až v 17. storočí. Medzi jej zakladateľov môžeme zaradiť francúzskeho filozofa, matematika a fyzika RENÉ DESCARTESA[1] (1596–1650), anglického matematika a fyzika ISAAKA NEWTONA[2] (1642–1727) a nemeckého filozofa a matematika GOTTFRIEDA WILHELMA LEIBNIZA[3] (1646–1716).

Pozrime sa trochu na historické súvislosti, ktoré stáli pri jej vzniku. Skúmanie pohybu sa stalo koncom 16. storočia ústrednou úlohou prírodovedy. Spoločenská prax žiadala lepšie zvládnuť zákonitosti pohybu a zmeny v rôznych oblastiach javov. Potreba rozvoja stavala prírodné vedy pred skúmanie pohybu, rôznych zmien a závislostí medzi zmenami rôznych veličín. Ako odraz spoločenských vlastností meniacich sa veličín a závislostí medzi nimi vznikol v matematike pojem premennej veličiny a funkčnej závislosti. To bolo nóvum, ktoré posunulo matematiku k „vyššej matematike“, k matematike premenných veličín. Treba povedať, že matematický pojem premennej veličiny a funkcie nie je nič iné ako abstrakcia, zovšeobecnenie konkrétnych premenných veličín – ako sú čas, dĺžka, rýchlosť, sila, atď. - a konkrétnych závislostí medzi nimi. V tomto období napríklad GALILEO GALILEI (1564–1642) objavuje zákon voľného pádu.

Matematiku vtedajšieho obdobia formuje riešenie praktických otázok. Rozsiahle zámorské plavby si vyžadujú presnejšie astronomické a geodetické merania a ich matematické spracovanie. Objavy nových území a ich mapovanie vedú k vzniku súradnicových systémov a analytickej geometrie. Rozvoj matematických schopností úzko súvisí s revolučnými objavmi v astronómii, ktoré sú spojené s menami MIKULÁŠ KOPERNIK (1473–1543), TYCHO DE BRAHE (1546–1601) a JOHANNES KEPLER (1571–1630). V roku 1635 zhrnul univerzitný profesor z Bologne BONAVENTURA CAVALIERI[4] (1598–1647) všetky dovtedy známe matematické poznatky infinitenzimálneho charakteru (z latinského infinitus – nekonečný) v práci „`Geometria indivisibilibus continuorum`“ a utvoril tak predprípravu na objavenie diferenciálneho a integrálneho počtu. Tento takzvaný infinitenzimálny počet objavili nezávisle na sebe Newton a Leibniz. Newtonov prístup mal fyzikálny charakter a deriváciu chápal predovšetkým ako rýchlosť, zatiaľ čo Leibnizov prístup mal geometrickú po-

[1] čítaj „Dekárt“
[2] čítaj „Njútn“
[3] čítaj „Lajbnyc“
[4] čítaj „Kavalieri“

vahu a deriváciu chápal ako smernicu dotyčnice ku grafu funkcie v danom bode. Prvú učebnicu infinitezimálneho počtu „`Analyse des Infiniment Petites pour l'Intelligence des Lignes Courbes`“ vydal v roku 1696 francúzsky matematik GUILLAUME FRANÇOIS ANTOIN DE L'HOSPITAL[5] (1661–1704).

V 18. storočí matematická analýza závažným spôsobom ovplyvňuje rozvoj všetkých dovtedajších matematických teórií, pretvára ich náplň, novým postupom rieši nejednu z nevyriešených úloh a presvedčivým spôsobom demonštruje jednotu celej matematiky. V rámci analýzy sa rozvíja teória radov, teória diferenciálnych rovníc, variačný počet, atď., na čom mal nemalú zásluhu najvýznamnejší matematik 18. storočia LEONHARD EULER[6] (1707–1783). Podľa jeho početných prác (vraj až 886) sa ustálila symbolika infinitezimálneho počtu (napr. $f(x)$, π, i, e, $\sum$, Δx, ...). V jeho stopách pokračujú mnohí ďalší, ako napríklad PIERRE SIMON LAPLACE[7] (1749–1827) a JOSEPH LOUIS LAGRANGE[8] (1736–1813), ktorý ako prvý použil symbolický zápis derivácie f'. Toto obdobie bolo však poznačené aj mnohými logickými nepresnosťami a nedôslednosťami. Potreba riešenia týchto otázok rigoróznych základov analýzy sa tak postupne prenášala až do 19. storočia.

V tomto období sa matematika čoraz viac oddeľuje od bezprostredných požiadaviek reálneho života, hoci spojenie matematiky a praxe sa nikdy úplne neprerušilo. Vzniká čistá a aplikovaná matematika, mnohí matematici pôsobia ako učitelia na vysokých školách a špecializujú sa na rôzne oblasti matematiky. V roku 1822 vydáva francúzsky matematik a fyzik JEANBAPTISTE JOSEPH FOURIER[9] (1768–1830) analytickú teóriu tepla „`Théorie analytique de la chaleur`“, v ktorej funkciu chápe ako ľubovoľné zobrazenie množiny reálnych čísel do seba. Pojem funkcie upresnil neskôr nemecký matematik PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859). Veľké zásluhy na rozvoji matematiky v tomto období má nemecký matematik a astronóm CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) a francúzsky matematik AUGUSTIN LOUIS CAUCHY[10] (1789–1857). Jeho práca „`Course d'analyse`“ z roku 1821 je základnou učebnicou diferenciálneho a integrálneho počtu fakticky platiacou dodnes. V Prahe žijúci BERNARD BOLZANO (1781–1848) tiež prispel k vybudovaniu základov matematickej analýzy, avšak mnoho jeho spisov bolo objavených až posmrtne a nedostalo sa do širšieho povedomia vtedajších matematikov. Bolzano predstihol svoju dobu pochopením pojmu nekonečno a v knihe „`Paradoxien des Unendlichen`“ (vyšla v roku 1851) študoval vlastnosti nekonečných množín, definoval pojem spočítateľnej a nespočítateľnej množiny a dospel až k pojmu mohutnosť kontinua. Na vypracovaní teórie množín mal hlavnú zásluhu GEORG CANTOR[11] (1845–1918). Táto teória sa stala základnou matematickou disciplínou, postavila doterajšie výsledky na pevnejší logický základ a pričinila sa o vznik nových oblastí, ako sú napríklad teória reálnych funkcií a funkcionálna analýza. Cantorovou zásluhou sa objasnil pojemu nekonečno v matematike, čím sa mohli v matematike začať skúmať nekonečné súbory objektov.

[5]čítaj „Lopital“
[6]čítaj „Ojler“
[7]čítaj „Laplas“
[8]čítaj „Lagranž“
[9]čítaj „Furier“
[10]čítaj „Kóši“
[11]čítaj „Kantor“

V 19. storočí sa rodí ďalšie veľmi významné odvetvie: teória funkcií komplexnej premennej veličiny. Jej počiatky badať síce ešte u starších matematikov (napr. u Eulera), ale pre jej prudký rozvoj bola rozhodujúca skutočnosť, že táto nová teória mala v rôznych oblastiach teórie a praxe (najmä technickej - hydrodynamika, aerodynamika, atď.) neobyčajne bohaté zastúpenie. Medzi významných matematikov tohto obdobia patrí BERNHARD RIEMANN[12] (1826–1866), ktorý je autorom dodnes používanej definície určitého, tzv. Riemannovho integrálu. Jeho súčasník KARL WEIERSTRASS[13] (1815–1897) dovŕšil problematiku budovania základov matematickej analýzy a odstránil niektoré nejasnosti z teórie iracionálnych čísel a teórie limít. Ďalšou významnou osobnosťou tohto obdobia bol nemecký matematik DAVID HILBERT (1862–1943), ktorý v práci „`Grundlagen der Geometrie`" prvýkrát sformuloval na základe axiomatickej metódy euklidovu geometriu.

Zatiaľ čo v 18. storočí prežívala matematická analýza najväčší rozmach čo sa kvantity týka, 19. storočie je obdobím konsolidácie a spresňovania je základov, ktoré sa posunuli až do dnešnej podoby, čomu napomohli mnohé postavy. Je ťažké v krátkosti vymenovať mnohých matematikov, ktorí nejakým spôsobom ovplyvnili vývoj matematickej analýzy a prispeli k jej súčasnému stavu. Snažili sme sa vyzdvihnúť snáď iba tých najvýznamnejších, avšak voľba práve spomenutých môže byť iba subjektívnym pohľadom autora. Treba zároveň povedať, že s mnohými ďalšími menami sa budeme postupne zoznamovať v priebehu kurzov matematickej analýzy. A prečo končíme tento historický exkurz v 19. storočí a nepokračujeme ďalej? Matematická analýza sa totiž natoľko rozrástla a rozkošatila, že je ťažké vôbec sa zmieniť o mnohých odvetviach a snáď mi čitateľ (aj menovateľ) odpustí, že sa radšej do vytvorenia určitého zosumarizovania zo skromnosti púšťať nebudeme. Spomenieme len, že rozširovaním a abstrahovaním klasickej analýzy ľudstvo dokázalo v 20. storočí vybudovať a prakticky využiť obdivuhodné teórie… Ale o tom až niekedy inokedy a na inom mieste.

[12]čítaj „Ríman"
[13]čítaj „Vajerštras"