Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 1

12. februára 2024

Podmienky

- nepovinná účasť na prednáškach (!nie na cvičeniach!)
- jedinečná možnosť pýtať sa!!!
- podmienky ku skúške (zverejnené koncom semestra)

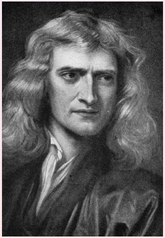
Literatúra k prednáškam

1. Mihalíková, B. – Ohriska, J.: *Matematická analýza 1*, el. skriptá UPJŠ, Košice, 2012. `http://www.upjs.sk/public/media/5596/Matematicka-analyza-I.pdf`
2. Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M.: *Matematika I.*, Alfa, Bratislava, 1966 (v závislosti od vydania).
3. časti elektronického textu sprístupňovaného na stránke `umv.science.upjs.sk/analyza` pri predmete MANb/19
4. ďalšie dostupné texty...

Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy

- predchodcovia: Archimedes, Kepler, Fermat, Descartes
- oficiálny vznik v 17. storočí: Newton, Leibniz
- kvantitatívny rozmach v 18. storočí: Euler, Laplace, Lagrange
- upresňovanie základov v 19. storočí: Cauchy, Bolzano, Riemann, Weierstrass, Cantor
- 20. storočie – konglomerát teórií

MAN = **disciplína zaoberajúca sa štúdiom vlastností množín a ich vzájomných zobrazení, ktoré sú určené topologickou štruktúrou (štruktúra polohy) a štruktúrou algebrických operácií.**





Historická exkurzia do dejín matematickej analýzy schématicky

Archimedes Kepler 1615 Fermat 1638	$\Rightarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Rightarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Rightarrow$	Cantor 1875 Dedekind
integrál	$\Rightarrow$	derivácia	$\Rightarrow$	limity, spojité funkcie	$\Rightarrow$	množiny, zobrazenia

– Čo je to vlastne **integrál**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **derivácia**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **súčet nekonečného radu**? Odpoveď: Limita

– A čo je to **limita**? Odpoveď: Číslo

A čo vlastne to **číslo** je???

Reálne čísla

... the definition of irrational numbers, on which geometric representations have often had a confusing influence... I take in my definition a purely formal point of view, *calling some given symbols numbers*, so that the existence of these numbers is beyond doubt.

Eduard Heine: *Die Elemente der Funktionenlehre* (1872)

At that point, my sense of dissatisfaction was so strong that I firmly resolved to start thinking until I should find a purely arithmetic and absolutely rigorous foundation of the principles of infinitesimal analysis... I achieved this goal on November 24th, 1858, ... but I could not really decide upon a proper publication, because, firstly, the subject is not easy to present, and, secondly, the material is not very fruitful.

Dedekind: *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872)

$\sqrt{3}$ is thus only a symbol for a number which has yet to be found, but is not its definition. This definition is, however, satisfactorily given by my method as, say $\{1{,}7, 1{,}73, 1{,}732, \dots\}$

Georg Cantor: *Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstraß-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen* (1889)

Dnes vieme elegantne odpovedať na položenú otázku:
Reálne čísla sú

- triedy ekvivalencií racionálnych Cauchyovských postupností;
- Dedekindove rezy na množine racionálnych čísel;
- jediné najmenšie úplné komutatívne archimedovské pole;
- ??? nejak inak (hlavne „ľudsky“) ???

Please forget everything you have learned in school; for you haven't learned it... My daughters have been studying (chemistry) for several semesters already, think they have learned differential and integral calculus in school, and even today don't know why $x \cdot y = y \cdot x$ is true.

Edmund Landau: *Grundlagen der Analysis* (1930)

Definícia – množina reálnych čísel

Množinou reálnych čísel $\mathbb{R}$ budeme nazývať množinu prvkov, na ktorej sú definované operácie sčítania $+$, násobenia $\cdot$ a relácia usporiadania $\leq$ také, že platí:

- $(\mathbb{R}, +, 0)$ je abelovská aditívna grupa, t.j.

S$_1$: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$ (komutativita sčítania);

S$_2$: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita sčítania);

S$_3$: $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x$ (existencia aditívnej identity);

S$_4$: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$ (existencia opačného prvku).

Please forget everything you have learned in school; for you haven't learned it... My daughters have been studying (chemistry) for several semesters already, think they have learned differential and integral calculus in school, and even today don't know why $x \cdot y = y \cdot x$ is true.

Edmund Landau: *Grundlagen der Analysis* (1930)

Definícia – množina reálnych čísel

Množinou reálnych čísel $\mathbb{R}$ budeme nazývať množinu prvkov, na ktorej sú definované operácie sčítania $+$, násobenia $\cdot$ a relácia usporiadania $\leq$ také, že platí:

- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ je abelovská multiplikatívna grupa kompatibilná s aditívnou grupou $(\mathbb{R}, +, 0)$, t.j.

N_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita násobenia);

N_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (asociativita násobenia);

N_3: $(\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot 1 = x$ (existencia multiplikatívnej jednotky);

N_4: $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = 1$ (existencia prevrátenej hodnoty);

N_5: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributivita násobenia vzhľadom na sčítanie).

Please forget everything you have learned in school; for you haven't learned it... My daughters have been studying (chemistry) for several semesters already, think they have learned differential and integral calculus in school, and even today don't know why $x \cdot y = y \cdot x$ is true.

Edmund Landau: *Grundlagen der Analysis* (1930)

Definícia – množina reálnych čísel

Množinou reálnych čísel $\mathbb{R}$ budeme nazývať množinu prvkov, na ktorej sú definované operácie sčítania $+$, násobenia $\cdot$ a relácia usporiadania $\leq$ také, že platí:

- Pre každé dva prvky $x, y \in \mathbb{R}$ platí aspoň jeden zo vzťahov $x \leq y$ alebo $y \leq x$, pričom

U_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymetria $\leq$);

U_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita $\leq$);

U_3: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (monotónnosť sčítania vzhľadom na $\leq$);

U_4: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (monotónnosť násobenia vzhľadom na $\leq$).

Please forget everything you have learned in school; for you haven't learned it... My daughters have been studying (chemistry) for several semesters already, think they have learned differential and integral calculus in school, and even today don't know why $x \cdot y = y \cdot x$ is true.

Edmund Landau: *Grundlagen der Analysis* (1930)

Definícia – množina reálnych čísel

Množinou reálnych čísel $\mathbb{R}$ budeme nazývať množinu prvkov, na ktorej sú definované operácie sčítania $+$, násobenia $\cdot$ a relácia usporiadania $\leq$ také, že platí:

• Axióma (H) o hornej hranici: Každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má najmenšie horné ohraničenie, t.j. ak $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ a $(\exists z \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ x \leq z$, tak $(\exists! S \in \mathbb{R})$

(i) $(\forall x \in M)\ x \leq S$ (S je horné ohraničenie M);

(ii) $(\forall t \in \mathbb{R}, t < S)(\exists x_0 \in M)\ t < x_0$ (S je najmenšie horné ohraničenie M).

Axiómy sčítania reálnych čísel

- S_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$ (komutativita sčítania);
- S_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita sčítania);
- S_3: $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x$ (existencia aditívnej identity);
- S_4: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$ (existencia opačného prvku).

Veta I.1

(i) $(\exists! 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x$;
(ii) $(\exists! 1 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot 1 = x$;
(iii) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists! y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$;
(iv) $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)(\exists! y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = 1$.

Prvok opačný k prvku $x \in \mathbb{R}$ označujeme $-x$. Súčet $x + (-y)$ budeme písať v tvare $x - y$ a označovať ako rozdiel prvkov x a y. Získaná operácia sa nazýva odčítanie.

Prvok, ktorý je prevrátenou hodnotou k $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, označujeme $\frac{1}{x}$. Súčin $x \cdot \frac{1}{y}$ budeme písať v tvare $\dfrac{x}{y}$ a označovať ako podiel prvkov x a $y \neq 0$. Takto získanú operáciu nazývame delenie (okrem delenia prvkom 0).

Axiómy sčítania reálnych čísel

S_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$ (komutativita sčítania);
S_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita sčítania);
S_3: $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x$ (existencia aditívnej identity);
S_4: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$ (existencia opačného prvku).

Prvok opačný k prvku $x \in \mathbb{R}$ označujeme $-x$. Súčet $x + (-y)$ budeme písať v tvare $x - y$ a označovať ako rozdiel prvkov x a y.

Prvok, ktorý je prevrátenou hodnotou k $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, označujeme $\frac{1}{x}$. Súčin $x \cdot \frac{1}{y}$ budeme písať v tvare $\dfrac{x}{y}$ a označovať ako podiel prvkov x a $y \neq 0$.

Tvrdenie I.2

(i) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ -(x + y) = -x + (-y)$;
(ii) $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, y \neq 0)\ \frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$.

Veta I.3

(i) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\exists! x \in \mathbb{R})\ a + x = b$;
(ii) $(\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)(\exists! x \in \mathbb{R})\ a \cdot x = b$.

Axiómy usporiadania reálnych čísel

U_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymetria $\leq$);
U_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita $\leq$);
U_3: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (monotónnosť sčítania vzhľadom na $\leq$);
U_4: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (monotónnosť násobenia vzhľadom na $\leq$).

Veta I.4

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$

(i) $x \leq y \wedge y \leq z \wedge x = z \Rightarrow x = y = z$;
(ii) $x < y \wedge y \leq z \Rightarrow x < z$;
(iii) $x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq y - x \Leftrightarrow -y \leq -x \Leftrightarrow x - y \leq 0$;
(iv) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$;
(v) $x < y \Leftrightarrow 0 < y - x \Leftrightarrow -y < -x \Leftrightarrow x - y < 0$.

Číslo $x \in \mathbb{R}$ budeme nazývať nezáporné (kladné), akk $0 \leq x$ ($0 < x$) a nekladné (záporné), akk $x \leq 0$ ($x < 0$).

Veta I.5 (trichotómia relácie $\leq$)

$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)$

Axiómy usporiadania reálnych čísel

U_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymetria $\leq$);
U_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita $\leq$);
U_3: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (monotónnosť sčítania vzhľadom na $\leq$);
U_4: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (monotónnosť násobenia vzhľadom na $\leq$).

Tvrdenie I.6

$(\forall x, y \in \mathbb{R})$

(i) $0 < x \Rightarrow -x < 0 \wedge 0 < \frac{1}{x}$;

(ii) $(0 < x \wedge 0 < y) \vee (x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow 0 < x \cdot y$;

(iii) $(0 < x \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge 0 < y) \Rightarrow x \cdot y < 0$;

(iv) $(x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge 0 < x < y) \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Tvrdenie I.7

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$

(i) $(x \leq y \wedge 0 < z) \Rightarrow xz \leq yz$;

(ii) $(x \leq y \wedge z < 0) \Rightarrow yz \leq xz$.

Axiómy usporiadania reálnych čísel

U_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymetria $\leq$);
U_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivita $\leq$);
U_3: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (monotónnosť sčítania vzhľadom na $\leq$);
U_4: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (monotónnosť násobenia vzhľadom na $\leq$).

Úlohy na (pre)cvičenie

Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- ◇ $(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 \cdot x = 0$;
- ◇ $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$;
- ◇ $(\forall x \in \mathbb{R})\ -x = (-1) \cdot x$;
- ◇ $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot (-y) = -x \cdot y$;
- ◇ $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, d \neq 0)\ \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$;
- ◇ $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, d \neq 0)\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$;
- ◇ $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0, d \neq 0)\ \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.