Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 2

15. februára 2024

Reálne čísla – zopakovanie

I believe there are 15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044 717 914 527 116 709 366 231 425 076 185 631 031 296 protons in the universe and the same number of electrons.

Sir Arthur Eddington: *The Philosophy of Physical Science* (1939)

Reálne čísla sú

- triedy ekvivalencií racionálnych Cauchyovských postupností;
- Dedekindove rezy na množine racionálnych čísel;
- jediné najmenšie úplné komutatívne archimedovské pole;

My sme zaviedli množinu $\mathbb{R}$ axiomaticky 4 skupinami axióm:

(S) axiómy sčítania:

S_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$;

S_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$;

S_3: $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x$;

S_4: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$;

Reálne čísla – zopakovanie

I believe there are 15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044 717 914 527 116 709 366 231 425 076 185 631 031 296 protons in the universe and the same number of electrons.

Sir Arthur Eddington: *The Philosophy of Physical Science* (1939)

Reálne čísla sú

- triedy ekvivalencií racionálnych Cauchyovských postupností;
- Dedekindove rezy na množine racionálnych čísel;
- jediné najmenšie úplné komutatívne archimedovské pole;

My sme zaviedli množinu $\mathbb{R}$ axiomaticky 4 skupinami axióm:

(N) axiómy násobenia:

N_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y \cdot x;$

N_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$

N_3: $(\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot 1 = x;$

N_4: $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = 1;$

N_5: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$

Reálne čísla – zopakovanie

I believe there are 15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044 717 914 527 116 709 366 231 425 076 185 631 031 296 protons in the universe and the same number of electrons.

Sir Arthur Eddington: *The Philosophy of Physical Science* (1939)

Reálne čísla sú

- triedy ekvivalencií racionálnych Cauchyovských postupností;
- Dedekindove rezy na množine racionálnych čísel;
- jediné najmenšie úplné komutatívne archimedovské pole;

My sme zaviedli množinu $\mathbb{R}$ axiomaticky 4 skupinami axióm:

(U) axiómy usporiadania: Pre každé dva prvky $x, y \in \mathbb{R}$ platí aspoň jeden zo vzťahov $x \leq y$ alebo $y \leq x$, pričom

U_1: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$;

U_2: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$;

U_3: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;

U_4: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$;

Reálne čísla – zopakovanie

I believe there are 15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044 717 914 527 116 709 366 231 425 076 185 631 031 296 protons in the universe and the same number of electrons.

Sir Arthur Eddington: *The Philosophy of Physical Science* (1939)

Reálne čísla sú

- triedy ekvivalencií racionálnych Cauchyovských postupností;
- Dedekindove rezy na množine racionálnych čísel;
- jediné najmenšie úplné komutatívne archimedovské pole;

My sme zaviedli množinu $\mathbb{R}$ axiomaticky 4 skupinami axióm:

(H) axióma o hornej hranici: ak $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ a $(\exists z \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ x \leq z$, tak $(\exists! S \in \mathbb{R})$

(i) $(\forall x \in M)\ x \leq S$;

(ii) $(\forall t \in \mathbb{R}, t < S)(\exists x_0 \in M)\ t < x_0$.

Reálne čísla verzus číselná os

Ohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

$$\begin{array}{ll}\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} & \text{uzavretý interval;}\\ (a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} & \text{otvorený interval;}\\ \langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} & \text{polootvorený alebo polouzavretý interval;}\\ (a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} & \text{polootvorený alebo polouzavretý interval.}\end{array}$$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nazývame rozšírená množina reálnych čísel (rozšírena číselná os).

Neohraničené intervaly s koncovými bodmi $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(-\infty, a\rangle &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\};\\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R}; x < a\};\\ \langle b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; b \leq x\};\\ (b, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; b < x\}.\end{aligned}$$

Absolútna hodnota reálneho čísla

Absolútna hodnota je hodnota, ktorá je absolútna. Teda sa o nej nešpekuluje. Je aká je a iná nebude.

Príklad: Ak je niekto absolútna nula, tak bude vždy nula a nič to nezmení.

Iný príklad: Ferko je absolútna jednička. Aj v tomto prípade sa už nič nedá robiť a dotyčný je jednoducho najlepší.

Necyklopédia (2016)

Definícia (absolútnej hodnoty reálneho čísla)

Absolútnou hodnotou čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame maximum z dvojice čísel x a $-x$ a píšeme $|x| = \max\{x, -x\}$.

Geometrická interpretácia: absolútna hodnota čísla x predstavuje vzdialenosť obrazu čísla x od nuly na číselnej osi, t.j. $|x - y|$ predstavuje vzdialenosť obrazov čísel x a y na reálnej osi

Priamo z definície vyplýva (overte!), že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

1. $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$
2. $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$
3. $|x| \geq 0$ a $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|x| = |-x|$

Elementárne vlastnosti absolútnej hodnoty reálneho čísla

Absolútnou hodnotou čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame maximum z dvojice čísel x a $-x$ a píšeme $|x| = \max\{x, -x\}$.

Veta I.8

$(\forall x \in \mathbb{R}) \; -|x| \leq x \leq |x|$

Veta I.9

$(\forall a, x \in \mathbb{R}, a > 0) \; |x| < a \; \Leftrightarrow \; -a < x < a$

Veta I.10

$(\forall x, y \in \mathbb{R})$

(i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(ii) $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$;

(iii) $||x| - |y|| \leq |x \pm y|$;

(iv) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ pre $y \neq 0$.

Príklad: Riešte v $\mathbb{R}$: $||3 - 2x| - 1| = -2|x|$

Elementárne vlastnosti absolútnej hodnoty reálneho čísla

Absolútnou hodnotou čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame maximum z dvojice čísel x a $-x$ a píšeme $|x| = \max\{x, -x\}$.

Definícia (signum reálneho čísla)

Signum čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame číslo $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

Tvrdenie I.11

$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}, z \neq 0)$

(i) $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$;

(ii) $\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$;

(iii) $|x| = \operatorname{sgn} x \cdot x$;

(iv) $\operatorname{sgn} \frac{x}{z} = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} z$.

Matematická indukcia a prirodzené čísla

I'm a mathematical optimist: I deal only with positive integers.

Tendai Chitewere

Neprirodzené číslo je číslo, čo je nám na nič alebo ho proste nepovažujeme za prirodzené. Po skonštatovaní máme právo príklad nepočítať, lebo nám v ňom jedno alebo viac čísiel príde neprirodzených.

Príklad: "Ty máš dve čokoládky? Ale to je neprirodzené, ja mám iba jednu. Tak buď mi jednu dáš, alebo sa s tebou už nehrám".

Necyklopédia (2016)

There are three kinds of people: those who can count and those who can't.

anonym

Die Natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

Leopold Kronecker

Definícia (množiny prirodzených čísel)

Množinou všetkých prirodzených čísel $\mathbb{N}$ nazývame najmenšiu podmnožinu množiny $\mathbb{R}$, ktorá obsahuje číslo 1 a s každým číslom n aj číslo $n+1$.

Množinou všetkých prirodzených čísel $\mathbb{N}$ nazývame najmenšiu podmnožinu množiny $\mathbb{R}$, ktorá obsahuje číslo 1 a s každým číslom n aj číslo $n+1$.

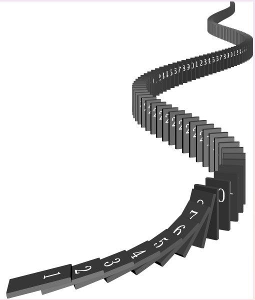
Veta o matematickej indukcii

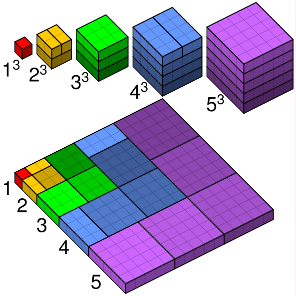
Nech V je výrok týkajúci sa množiny prirodzených čísel a

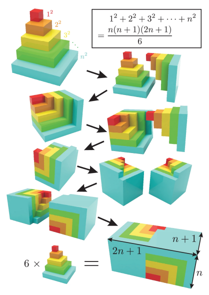
(i) nech V platí pre číslo 1,

(ii) ak V platí pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, tak platí aj pre $n+1$.

Potom V platí pre každé prirodzené číslo.







Množinou všetkých prirodzených čísel $\mathbb{N}$ nazývame najmenšiu podmnožinu množiny $\mathbb{R}$, ktorá obsahuje číslo 1 a s každým číslom n aj číslo $n+1$.

Veta o matematickej indukcii

Nech V je výrok týkajúci sa množiny prirodzených čísel a

(i) nech V platí pre číslo 1,

(ii) ak V platí pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, tak platí aj pre $n+1$.

Potom V platí pre každé prirodzené číslo.

Úlohy na (pre)cvičenie

Dokážte nasledujúce tvrdenia:

◇ $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;

◇ $(\forall n \in \mathbb{N})\ -1 + 2 - 3 + \cdots + (-1)^n n = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$;

◇ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2)\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$;

◇ $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3)\ (n+1)^n < n^{n+1}$.

Množinou všetkých prirodzených čísel $\mathbb{N}$ nazývame najmenšiu podmnožinu množiny $\mathbb{R}$, ktorá obsahuje číslo 1 a s každým číslom n aj číslo $n+1$.

Veta o matematickej indukcii

Nech V je výrok týkajúci sa množiny prirodzených čísel a

(i) nech V platí pre číslo 1,

(ii) ak V platí pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, tak platí aj pre $n+1$.

Potom V platí pre každé prirodzené číslo.

Zopakovanie: Ak $x \leq y$, tak číslo x nazývame minimum z čísel x a y, píšeme $x = \min\{x, y\}$ a číslo y nazývame maximum z čísel x a y, píšeme $y = \max\{x, y\}$.

Veta o maxime a minime konečnej množiny

Každá neprázdna konečná množina má maximum a minimum.

Veta o dobrom usporiadaní

Každá neprázdna množina prirodzených čísel má minimum.

Pozorovanie I: V $\mathbb{N}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a + x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{N}!$$

Definícia (množiny celých čísel)

Množinou všetkých celých čísel $\mathbb{Z}$ nazývame zjednotenie množiny $\mathbb{N}$, množiny všetkých čísel opačným k prvkom $\mathbb{N}$ a jednoprvkovej množiny obsahujúcej číslo 0. Jej prvky nazývame **celé čísla**.

Pozorovanie II: V $\mathbb{Z}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a \cdot x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{Z}!$$

Definícia (množiny racionálnych a iracionálnych čísel)

Množinou všetkých racionálnych čísel $\mathbb{Q}$ nazývame množinu všetkých podielov $\frac{x}{y}$, kde $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{N}$. Prvky množiny $\mathbb{Q}$ nazývame **racionálne čísla**. Reálne čísla, ktoré nie sú racionálne, nazývame **iracionálne čísla**, t.j. $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.