Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 3

19. februára 2024

Axiomatická výstavba množiny reálnych čísel – zopakovanie

– "pravidlá" pre sčítanie (binárna operácia $+$)
– "pravidlá" pre násobenie (binárna operácia $\cdot$)
– "pravidlá" pre usporiadanie (binárna relácia $\leq$)
– axióma o hornej hranici (axióma (H))

Ak vlastnosť M neplatí pre všetky hodnoty premennej x, ale platí pre všetky hodnoty, ktoré sú menšie ako nejaké u, potom existuje kvantita U, ktorá je najväčšia z tých, o ktorých sa dá tvrdiť, že všetky menšie x majú vlastnosť M.

Bernard Bolzano: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes...* (1817)

Lehrsatz. Wenn eine Eigenschaft M nicht allen Werthen einer veränderlichen Größe x, wohl aber allen, die kleiner sind, als ein gewisser u, zukömmt: so gibt es allemahl eine Größe U, welche die größte derjenigen ist, von denen behauptet werden kann, daß alle kleineren x die Eigenschaft M besitzen.

BERNARD BOLZANO (1781–1848)

Axiomatická výstavba množiny reálnych čísel – zopakovanie

– "pravidlá" pre sčítanie (binárna operácia $+$)
– "pravidlá" pre násobenie (binárna operácia $\cdot$)
– "pravidlá" pre usporiadanie (binárna relácia $\leq$)
– axióma o hornej hranici (axióma (H))

Ak vlastnosť M neplatí pre všetky hodnoty premennej x, ale platí pre všetky hodnoty, ktoré sú menšie ako nejaké u, potom existuje kvantita U, ktorá je najväčšia z tých, o ktorých sa dá tvrdiť, že všetky menšie x majú vlastnosť M.

Bernard Bolzano: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes...* (1817)

Axióma (H): Každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má najmenšie horné ohraničenie, t.j. ak $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ a $(\exists z \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ x \leq z$, tak $(\exists! S \in \mathbb{R})$

(i) $(\forall x \in M)\ x \leq S$ (S je horné ohraničenie M);
(ii) $(\forall t \in \mathbb{R}, t < S)(\exists x_0 \in M)\ t < x_0$ (S je najmenšie horné ohraničenie M).

Číslo S nazývame supremum množiny M, označujeme $S = \sup M$.

Množina $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel *nie je žiadne sito*, pretože každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má najmenšie horné ohraničenie.

Definícia (ohraničenej a neohraničenej množiny)

- Neprázdna množina $M \subset \mathbb{R}$ sa nazýva ohraničená zhora, akk existuje $H \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in M$ platí $x \leq H$.
- Neprázdna množina $M \subset \mathbb{R}$ sa nazýva ohraničená zdola, akk existuje $D \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in M$ platí $x \geq D$.
- Každé číslo H, resp. D s uvedenou vlastnosťou nazývame horné, resp. dolné ohraničenie množiny M.
- Neprázdna množina $M \subset \mathbb{R}$ sa nazýva ohraničená, akk je ohraničená zhora aj zdola.
- Hovoríme, že M je neohraničená (zhora, zdola), akk M nie je ohraničená (zhora, zdola).

Neprázdna množina $M \subset \mathbb{R}$ ohraničená práve vtedy, keď

$$(\exists H \in \mathbb{R})(\exists D \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\, D \leq x \leq H.$$

Nedá sa počet kvantifikátorov zredukovať?

Množina $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel *nie je žiadne sito*, pretože každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má najmenšie horné ohraničenie.

Definícia (ohraničenej a neohraničenej množiny)

- Neprázdna množina $M \subset \mathbb{R}$ sa nazýva ohraničená zhora, akk existuje $H \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in M$ platí $x \leq H$.
- Neprázdna množina $M \subset \mathbb{R}$ sa nazýva ohraničená zdola, akk existuje $D \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in M$ platí $x \geq D$.
- Každé číslo H, resp. D s uvedenou vlastnosťou nazývame horné, resp. dolné ohraničenie množiny M.
- Neprázdna množina $M \subset \mathbb{R}$ sa nazýva ohraničená, akk je ohraničená zhora aj zdola.
- Hovoríme, že M je neohraničená (zhora, zdola), akk M nie je ohraničená (zhora, zdola).

Veta I.12

Neprázdna množina $M \subset \mathbb{R}$ je ohraničená práve vtedy, keď $(\exists K \in \mathbb{R}, K > 0)(\forall x \in M)\ |x| \leq K$.

Axióma (H): Každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má najmenšie horné ohraničenie, t.j. ak $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ a $(\exists z \in \mathbb{R})(\forall x \in M)\ x \leq z$, tak $(\exists! S \in \mathbb{R})$

(i) $(\forall x \in M)\ x \leq S$;

(ii) $(\forall t \in \mathbb{R}, t < S)(\exists x_0 \in M)\ t < x_0$.

Číslo S nazývame supremum množiny M, označujeme $S = \sup M$.

Definícia (maximum množiny)

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Číslo $c \in M$ nazývame maximum množiny M, akk $(\forall x \in M)\ x \leq c$. Označujeme $c = \max M$.

Veta I.13

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Ak existuje $\max M$, tak existuje aj $\sup M$ a platí $\max M = \sup M$.

Veta I.14

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ je zhora ohraničená. Číslo $S \in \mathbb{R}$ je supremom množiny M práve vtedy, keď

(i') $(\forall x \in M)\ x \leq S$;

(ii') $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in M)\ S - \varepsilon < x_0$.

Dualita je všade, a preto je dobré poznať obe strany mince.

Lema I.15

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ a $M' = \{-x\,; x \in M\}$. Potom

(i) ak M je ohraničená zhora (zdola), tak M' je ohraničená zdola (zhora);

(ii) ak H (D) je horné (dolné) ohraničenie množiny M, tak $-H$ ($-D$) je dolné (horné) ohraničenie množiny M';

(iii) ak M je neohraničená zhora (zdola), tak M' je neohraničená zdola (zhora).

Among the small there is no smallest, but always something smaller.

Anaxagoras, citát z *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (Hermann Weyl, 1949)

Veta o existencii a jednoznačnosti najväčšieho dolného ohraničenia

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ je zdola ohraničená množina. Potom $(\exists! s \in \mathbb{R})$

(i) $(\forall x \in M)\ s \leq x$;

(ii) $(\forall t \in \mathbb{R}, t > s)(\exists x_0 \in M)\ x_0 < t$.

Číslo s s danými vlastnosťami nazývame infimum množiny M a označujeme $s = \inf M$.

Dualita je všade, a preto je dobré poznať obe strany mince.

Definícia (minimum množiny)

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Číslo $d \in M$ nazývame **minimum množiny M**, akk $(\forall x \in M)\ d \leq x$. Označujeme $d = \min M$.

Tvrdenie I.16

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Ak existuje $\min M$, tak $\inf M = \min M$.
Ak M je zdola ohraničená, tak $s = \inf M$ práve vtedy, keď

(i') $(\forall x \in M)\ s \leq x$;

(ii') $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in M)\ x_0 < s + \varepsilon$.

Dohoda: pre zhora neohraničenú množinu M kladieme $\sup M = +\infty$;

pre zdola neohraničenú množinu M kladieme $\inf M = -\infty$;

pre prázdnu množinu kladieme $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = +\infty$;

Tvrdenie I.17

$(\forall M \subseteq \mathbb{R}^*)(\exists \inf M \in \mathbb{R}^* \wedge \exists \sup M \in \mathbb{R}^*)$