# Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 4

22. februára 2024

## Axiomatická výstavba množiny reálnych čísel – zopakovanie

– "pravidlá" pre sčítanie (binárna operácia $+$)
– "pravidlá" pre násobenie (binárna operácia $\cdot$)
– "pravidlá" pre usporiadanie (binárna relácia $\leq$)
– axióma o hornej hranici (axióma (H))

> Ak vlastnosť $M$ neplatí pre všetky hodnoty premennej $x$, ale platí pre všetky hodnoty, ktoré sú menšie ako nejaké $u$, potom existuje kvantita $U$, ktorá je najväčšia z tých, o ktorých sa dá tvrdiť, že všetky menšie $x$ majú vlastnosť $M$.
>
> Bernard Bolzano: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes...* (1817)

**Axióma (H):** Každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má supremum.

**Veta o existencii a jednoznačnosti najväčšieho dolného ohraničenia**

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ je zdola ohraničená množina. Potom $(\exists! s \in \mathbb{R})$

(i) $(\forall x \in M)\ s \leq x$;

(ii) $(\forall t \in \mathbb{R}, t > s)(\exists x_0 \in M)\ x_0 < t$.

Číslo $s$ s danými vlastnosťami nazývame infimum množiny $M$.

Dualita je všade, a preto je dobré poznať obe strany mince.

## Definícia (minimum množiny)

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Číslo $d \in M$ nazývame minimum množiny $M$, akk $(\forall x \in M)\ d \leq x$. Označujeme $d = \min M$.

## Tvrdenie I.16

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Ak existuje $\min M$, tak $\inf M = \min M$.
Ak $M$ je zdola ohraničená, tak $s = \inf M$ práve vtedy, keď

(i') $(\forall x \in M)\ s \leq x$;

(ii') $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in M)\ x_0 < s + \varepsilon$.

**Dohoda:** pre zhora neohraničenú množinu $M$ kladieme $\sup M = +\infty$;

pre zdola neohraničenú množinu $M$ kladieme $\inf M = -\infty$;

pre prázdnu množinu kladieme $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = +\infty$;

## Tvrdenie I.17

$(\forall M \subseteq \mathbb{R}^*)(\exists \inf M \in \mathbb{R}^* \wedge \exists \sup M \in \mathbb{R}^*)$

Dualita je všade, a preto je dobré poznať obe strany mince.

## Definícia (minimum množiny)

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Číslo $d \in M$ nazývame minimum množiny $M$, akk $(\forall x \in M)\ d \leq x$. Označujeme $d = \min M$.

## Tvrdenie I.16

Nech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Ak existuje $\min M$, tak $\inf M = \min M$.
Ak $M$ je zdola ohraničená, tak $s = \inf M$ práve vtedy, keď

(i') $(\forall x \in M)\ s \leq x$;

(ii') $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in M)\ x_0 < s + \varepsilon$.

## Veta I.18

Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny a $(\forall x \in A)(\forall y \in B)\ x \leq y$. Potom $A$ je zhora ohraničená, $B$ je zdola ohraničená a $\sup A \leq \inf B$.

**Úloha:** Nájdite $\max M$, $\min M$, $\sup M$ a $\inf M$, ak $M = \{x = \frac{n+1}{3n+2}, n \in \mathbb{N}\}$.

## Niektoré dôležité vlastnosti množín reálnych čísel

Noli tangere circulos meos!

Archimedes

### Veta (Archimedov princíp)

Množina $\mathbb{N}$ je zhora neohraničená.

### Dôsledok

- Množina $\mathbb{Z}$ je zhora aj zdola neohraničená.
- $(\forall x \in \mathbb{R}, x > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{n} < x$

ARCHIMEDES ZO SYRAKÚZ (287 p.n.l. – 212 p.n.l.)

# Niektoré dôležité vlastnosti množín reálnych čísel

**Veta (Archimedova/Eudoxova vlastnosť)**

$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0)(\exists! k \in \mathbb{Z})\ kx \leq y < (k+1)x$

ARCHIMEDES (287 p.n.l.–212 p.n.l.)

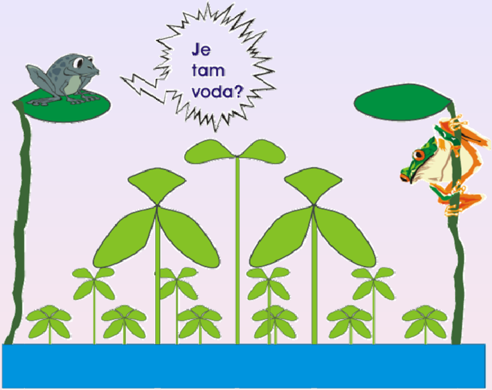
EUDOXUS (395 p.n.l.–342 p.n.l.)

Špeciálne, pre $x = 1$ máme tvrdenie

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists! k \in \mathbb{Z})\ k \leq y < k+1.$$

Číslo $k \in \mathbb{Z}$ nazývame celá časť reálneho čísla $y$ a označujeme $[y]$. Niekedy používame historicky zaužívané označenie $\mathrm{E}(y)$.

Predstavme si rybník, v ktorom cez leto vyrašili všetky možné *n*-lístky, každý druh v konečnom počte exemplárov. Zostala v rybníku ešte nejaká voda?

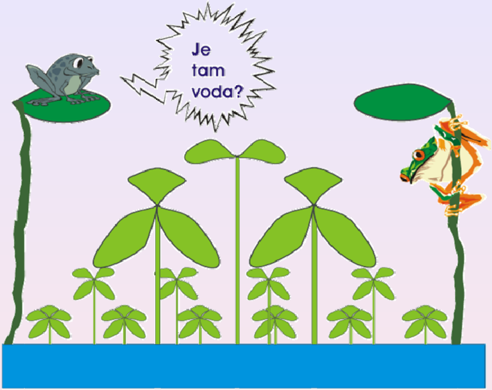



## Veta o hustote racionálnych čísel v číslach reálnych

$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y)(\exists r \in \mathbb{Q})\; x < r < y$

To je husté!!!

Predstavme si rybník, v ktorom cez leto vyrašili všetky možné *n*-lístky, každý druh v konečnom počte exemplárov. Zostala v rybníku ešte nejaká voda?




## Veta o hustote iracionálnych čísel v číslach reálnych

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y)(\exists p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\ x < p < y$$

Matematická definícia hustého lesa: Les nazývame *hustý*, akk medzi každými dvoma stromami je ďalší strom.