Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 5

26. februára 2024

Mocnina s prirodzeným a celočíselným exponentom

Definícia (mocniny s prirodzeným exponentom)

Nech $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Číslo x^n dané predpisom

(a) $x^1 := x$,

(b) $x^n := x^{n-1} \cdot x$ pre $n > 1$.

nazývame n-tou mocninou čísla x.

Here it will be proper to observe, that I make use of $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$, etc. for $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, etc.

Isaac Newton: *Fluxiones* (1671)

Definícia (mocniny s celočíselným exponentom)

Nech $x \in \mathbb{R}$. Potom

(a) $x^0 := 1$,

(b) pre $x \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$ položme $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$.

Tvrdenie I.19

(a) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall m, n \in \mathbb{Z})\ x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

(b) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall m, n \in \mathbb{Z})\ (x^n)^m = x^{n \cdot m}$

Mocnina s prirodzeným a celočíselným exponentom

Definícia (mocniny s prirodzeným exponentom)

Nech $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Číslo x^n dané predpisom

(a) $x^1 := x$,

(b) $x^n := x^{n-1} \cdot x$ pre $n > 1$.

nazývame n-tou mocninou čísla x.

Here it will be proper to observe, that I make use of $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$, etc. for $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, etc.

Isaac Newton: *Fluxiones* (1671)

Definícia (mocniny s celočíselným exponentom)

Nech $x \in \mathbb{R}$. Potom

(a) $x^0 := 1$,

(b) pre $x \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$ položme $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$.

Tvrdenie I.20

(a) $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall n \in \mathbb{Z})\ (xy)^n = x^n y^n$

(b) $(\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 < x < y)(\forall n \in \mathbb{N})\ x^n < y^n$

n-tá odmocnina reálneho čísla

Čo je to číslo $\sqrt{2}$?

> $\sqrt{2}$ is thus only a symbol for a number which has yet to be found, but is not its definition. This definition is, however, satisfactorily given by my method as, say $\{1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ \dots\}$
>
> Georg Cantor: *Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstraß-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen* (1889)

Čo tým chce Cantor povedať? Akú svoju metódu má na mysli?

$$1^2 < 2 < 2^2$$
$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$$
$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$$
$$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$$
$$\vdots$$

Ukážme, že

$$\sqrt{2} = \sup\{1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \dots\}.$$

$\sqrt{2}$ **je iracionálne číslo:** Predpokladajme, že existujú také nesúdeliteľné čísla $p, q \in \mathbb{N}$, že $2 = (p/q)^2$. Potom $2q^2 = p^2$, teda p^2 je párne (a preto aj p je párne), čiže $p = 2m$, kde $m \in \mathbb{N}$. Z toho ale vyplýva, že $2q^2 = p^2 = 4m^2$, a teda $q^2 = 2m^2$, čo znamená, že q je párne. Keď však obe čísla p, q sú párne, máme spor, pretože nie sú nesúdeliteľné.

Čo je teda číslo $\sqrt[n]{x}$?

Veta o existencii a jednoznačnosti *n*-tej odmocniny

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! y \in \mathbb{R}, y > 0)\ y^n = x$$

Náčrt dôkazu: Definujme množinu $A = \{z \in \mathbb{R}; z^n \leq x\}$. Ľahko sa ukáže, že $A \neq \emptyset$ a je ohraničená zhora, teda $(\exists! y = \sup A)$. O tomto čísle y sa ďalej ukáže, že vyhovuje rovnici $y^n = x$ (pomocou trichotómie).

Poznámky:

(i) niekedy vieme odmocniť aj záporné čísla, t.j. ak $x < 0$ a $n \in \mathbb{N}$ je nepárne, potom kladieme $\sqrt[n]{x} := -\sqrt[n]{-x}$

(ii) veta neplatí v číslach komplexných!!!

Veta I.21

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0)(\forall m, n \in \mathbb{N})\ \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} \wedge \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

Veta I.22

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x < y)(\forall n \in \mathbb{N})\ \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$$

Mocnina s racionálnym exponentom

Here it will be proper to observe, that I make use of $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{5}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}$, etc. for $\sqrt{x}, \sqrt{x^3}, \sqrt{x^5}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x^2}$, etc., and of $x^{-\frac{1}{2}}, x^{-\frac{2}{3}}, x^{-\frac{1}{4}}$ etc. for $\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, etc.

Isaac Newton: *Fluxiones* (1671)

Definícia (mocniny s racionálnym exponentom)

Nech $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ a $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Mocninou x^r nazývame číslo $\sqrt[q]{x^p}$.

Veta (o jednoznačnosti mocniny s racionálnym exponentom)

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})\ \left(r = \frac{p}{q} = \frac{m}{n}, p, m \in \mathbb{Z}, q, n \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{x^p}$$

Veta I.23

$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0)(\forall r, s \in \mathbb{Q})$

(i) $x^r \cdot y^r = (xy)^r \wedge \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$;

(ii) $x^r \cdot x^s = x^{r+s} \wedge \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$;

(iii) $(x < y \wedge r > 0) \Rightarrow x^r < y^r$;

(iv) $(x > 1 \wedge r > s) \Rightarrow x^r > x^s$.

Mocnina s reálnym exponentom

Eodem modo res se habet, si exponens z valores irrationales accipiat, quibus casibus cum difficile sit numerum valorum involutorum concipere, unicus tantum realis consideratur. Sic $a^{\sqrt{7}}$ erit valor determinatus intra limites a^2 et a^3 comprehensus...

Leonhard Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

$$\pi^{\sqrt{7}} = \sup\left\{\pi^2,\ \pi^{2{,}6},\ \pi^{2{,}64},\ \pi^{2{,}645},\ \pi^{2{,}6457},\ \dots,\right\}$$

Definícia (mocniny s reálnym exponentom)

Nech $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Ak $x > 1$ a $\alpha > 0$, tak *mocninou* x^α budeme rozumieť číslo $\sup\{x^r; r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \alpha\}$.

(ii) Pre $x \in (0,1)$ a $\alpha > 0$ definujeme $x^\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$.

(iii) Pre $x = 1$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme $x^\alpha = 1^\alpha = 1$.

(iv) Pre $x > 0$ a $\alpha < 0$ definujeme $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.

(v) Pre $x = 0$ a $\alpha > 0$ definujeme $x^\alpha = 0^\alpha = 0$.

Mocnina s reálnym exponentom

Eodem modo res se habet, si exponens z valores irrationales accipiat, quibus casibus cum difficile sit numerum valorum involutorum concipere, unicus tantum realis consideratur. Sic $a^{\sqrt{7}}$ erit valor determinatus intra limites a^2 et a^3 comprehensus...

Leonhard Euler: *Introductio in analysin infinitorum* (1748)

Tvrdenie I.24

$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

(i) $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha \wedge \frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha;$

(ii) $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta} \wedge \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \wedge (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\cdot\beta};$

(iii) $(x > 1 \wedge \alpha > 0) \vee (x \in (0,1) \wedge \alpha < 0) \Rightarrow x^\alpha > 1;$

(iv) $(x > 1 \wedge \alpha < 0) \vee (x \in (0,1) \wedge \alpha > 0) \Rightarrow x^\alpha < 1;$

(v) $(x > 1 \wedge \alpha < \beta) \Rightarrow x^\alpha < x^\beta;$

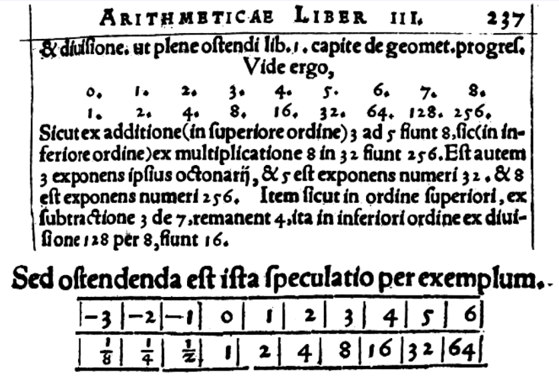
(vi) $(x \in (0,1) \wedge \alpha < \beta) \Rightarrow x^\alpha > x^\beta;$

(vii) $(0 < x < y \wedge \alpha > 0) \Rightarrow x^\alpha < y^\alpha;$

(viii) $(0 < x < y \wedge \alpha < 0) \Rightarrow x^\alpha > y^\alpha.$

Logaritmus reálneho čísla

> Seeing there is nothing that is so troublesome to mathematical practice, nor that doth more molest and hinder calculators, than the multiplications, divisions, square and cubical extractions of great numbers. ... I began therefore to consider in my mind by what certain and ready art I might remove those hindrances.
>
> John Napier: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614)



ARITHMETICAE LIBER III. 237

& diuiſione, ut plene oſtendi lib. 1. capite de geomet. progreſ.

Vide ergo,

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Sicut ex additione (in ſuperiore ordine) 3 ad 5 fiunt 8, ſic (in inferiore ordine) ex multiplicatione 8 in 32 fiunt 256. Eſt autem 3 exponens ipſius octonarij, & 5 eſt exponens numeri 32. & 8 eſt exponens numeri 256. Item ſicut in ordine ſuperiori, ex ſubtractione 3 de 7, remanent 4, ita in inferiori ordine ex diuiſione 128 per 8, fiunt 16.

Sed oſtendenda eſt iſta ſpeculatio per exemplum.

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

MIRIFICI

LOGARITHMORVM CANONIS DESCRIPTIO,

Ejuſque uſus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logiſtica Mathematica, ampliſsimi, facillimi, & expeditiſſimi explicatio.

ACCESSERVNT OPERA POSTHVMA;

Primò, Mirifici ipſius canonis conſtructio, & Logarithmorum ad naturales ipſorum numeros habitudines.

Secundò, Appendix de alia, eâque præſtantiore Logarithmorum ſpecie conſtruenda.

Tertiò, Propoſitiones quædam eminentiſſimæ, ad Triangula ſphærica mirâ facilitate reſolvenda.

Autore ac Inventore IOANNE NEPERO, Barone Merchiſtonii, &c. Scoto.

EDINBVRGI,
Excvdebat Andreas Hart.
Anno 1619.

Michael Stifel: *Arithmetica integra* (1544)

Logaritmus reálneho čísla

... the accent in calculation led Justus Byrgius on the way to these very logarithms many years before Napier's system appeared; but ... instead of rearing up his child for the public benefit he deserted it in the birth.

Johannes Kepler: *Rudolphine Tables* (1627)

Definícia (logaritmu reálneho čísla)

Nech $a, x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Reálne číslo y také, že $a^y = x$ nazývame logaritmus čísla x pri základe a a píšeme $y = \log_a x$.

JOHN NAPIER (1550–1617)

JOOST BÜRGI (1552–1632)

Veta o existencii a jednoznačnosti logaritmu

$(\forall a, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, x > 0)(\exists! y \in \mathbb{R})\ a^y = x$

Logaritmus reálneho čísla

> ... the accent in calculation led Justus Byrgius on the way to these very logarithms many years before Napier's system appeared; but ... instead of rearing up his child for the public benefit he deserted it in the birth.
>
> Johannes Kepler: *Rudolphine Tables* (1627)

Definícia (logaritmu reálneho čísla)

Nech $a, x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Reálne číslo y také, že $a^y = x$ nazývame **logaritmus čísla x pri základe a** a píšeme $y = \log_a x$.

Veta I.25

$(\forall a, b, x, y, \alpha \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0, y > 0)$

(i) $\log_a 1 = 0 \wedge \log_a a = 1$;

(ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \wedge \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

(iii) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \wedge \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_b x \cdot \log_a b$;

(iv) $(a > 1 \wedge x < y) \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;

(v) $(a \in (0,1) \wedge x < y) \Rightarrow \log_a x > \log_a y$.