Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
`umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html`

Prednáška 6

29. februára 2024

Postupnosti reálnych čísel

Zopakovanie – funkcia ako zobrazenie

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

Definícia (postupnosti reálnych čísel)

Postupnosťou (reálnych čísel) nazývame funkciu $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, zapisujeme $(a_n)_1^\infty$.

Poznámky:

- funkčné hodnoty postupnosti píšeme v indexe, t.j. a_n namiesto $a(n)$;
- prvky a_n, $n \in \mathbb{N}$, nazývame členy postupnosti, prvok a_k nazývame k-ty člen postupnosti $(a_n)_1^\infty$ a číslo k index člena a_k;
- množinu $M = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ nazývame množina členov postupnosti $(a_n)_1^\infty$;
- formálne odchýlky: $(a_n)_0^\infty$, $(x_k)_{-3}^\infty$, $(w_i)_4^\infty$ alebo $\alpha_n = \frac{n^2}{(n-3)(n+7)}$;

Postupnosti reálnych čísel

Zopakovanie – funkcia ako zobrazenie

Nech X, Y sú množiny. Ak každému prvku $x \in X$ je určitým spôsobom priradený práve jeden prvok $y \in Y$, hovoríme, že na množine X je definované zobrazenie f, zapisujeme $y = f(x)$, $x \in X$.

Definícia (postupnosti reálnych čísel)

Postupnosťou (reálnych čísel) nazývame funkciu $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, zapisujeme $(a_n)_1^\infty$.

Spôsoby zadania postupností:

a) explicitne: $a_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\mathrm{E}\left(\frac{i-1}{2}\right)} \frac{1}{i}$ alebo $b_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) rekurentne: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (známa to Fibonacciho postupnosť)

c) opisom: a_n je v poradí n-té prvočíslo, t.j. $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, ...

d) inými spôsobmi (vymenovaním, graficky, atď)

Motivácia k ďalším pojmom

Zložené úrokovanie s n-konverziami

$$Z_k^n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{kn}$$

je hodnota vkladu po k rokoch, pričom a_0 je počiatočný vklad, p je ročná úroková sadzba (p.a.), k je počet rokov a n je počet konverzií.

Pozrime sa ako sa vyvíja hodnota vkladu $a_0 = 100$ eur pri úrokovej sadzbe $p = 10\%$ po 20 rokoch ($k = 20$) vzhľadom na počet konverzií:

- $n = 1, \quad Z_{20}^{1} = 672$
- $n = 2, \quad Z_{20}^{2} = 703$
- $n = 4, \quad Z_{20}^{4} = 721$
- $n = 12, \quad Z_{20}^{12} = 733$
- $n = 365, \quad Z_{20}^{365} = 739$

Bude sa pri ďalšom zvyšovaní počtu konverzií hodnota vkladu neobmedzene zvyšovať?

Ohraničenosť postupnosti

Pripomenutie: postupnosť je funkcia definovaná na množine prirodzených čísel!

Zopakovanie – ohraničenosť funkcie

Nech $f : X \to Y$ je funkcia.

(i) Hovoríme, že f je ohraničená zhora (zdola) na množine $M \subseteq D_f$, akk množina $\{y; y = f(x), x \in M\}$ je ohraničená zhora (zdola).

(ii) Funkcia f sa nazýva ohraničená na $M \subseteq D_f$, akk je na $M \subseteq D_f$ ohraničená zhora aj zdola.

Definícia (ohraničenej postupnosti)

Postupnosť $(a_n)_1^\infty$ nazývame ohraničená zhora (zdola), akk je ohraničená zhora (zdola) množina členov tejto postupnosti. Postupnosť nazývame ohraničená, akk je ohraničená zhora aj zdola.

Úloha: zapíšte definíciu ako kvantifikované výroky!

(i) $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená zhora, akk $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq H$;

(ii) $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená zdola, akk $(\exists D \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ D \leq a_n$;

(iii) $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená, akk $(\exists D \in \mathbb{R})(\exists H \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ D \leq a_n \leq H$;

Ohraničenosť postupnosti

Pripomenutie: postupnosť je funkcia definovaná na množine prirodzených čísel!

Zopakovanie – ohraničenosť funkcie

Nech $f : X \to Y$ je funkcia.

(i) Hovoríme, že f je ohraničená zhora (zdola) na množine $M \subseteq D_f$, akk množina $\{y; y = f(x), x \in M\}$ je ohraničená zhora (zdola).

(ii) Funkcia f sa nazýva ohraničená na $M \subseteq D_f$, akk je na $M \subseteq D_f$ ohraničená zhora aj zdola.

Definícia (ohraničenej postupnosti)

Postupnosť $(a_n)_1^\infty$ nazývame ohraničená zhora (zdola), akk je ohraničená zhora (zdola) množina členov tejto postupnosti. Postupnosť nazývame ohraničená, akk je ohraničená zhora aj zdola.

Tvrdenie III.1

Postupnosť $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená práve vtedy, keď existuje číslo $K > 0$ také, že pre všetky členy postupnosti platí $|a_n| \leq K$.

Limita postupnosti

Analysis is the art of taming infinity.

Neil Falkner: Amer. Math. Monthly 116 (2009), p. 658

One says that a quantity is the limit of another quantity, if the second approaches the first closer than any given quantity, however small...

D'Alembert: *Encyclopédie* (1765)

When a variable quantity converges towards a fixed limit, it is often useful to indicate this limit by a specific notation, which we shall do by setting the abbreviation lim in front of the variable in question...

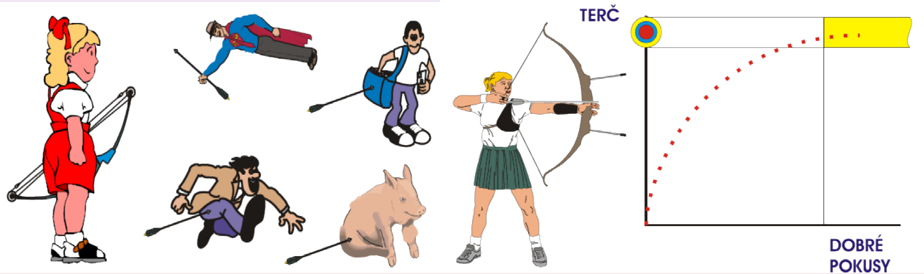
Cauchy: *Cours d'Analyse* (1821)

JEAN D'ALEMBERT (1717–1783)

LUIS CAUCHY (1789–1857)

Limita postupnosti – dotýkanie sa nekonečna

Malá Anička dostala k narodeninám luk a šípy. Najskôr si nebol istý poštár, sused, prasiatko, proste nikto. Časom sa však Anička zlepšovala, takže sa sused, poštár i prasiatko prestali báť. Keď Anička vyrástla, bola skvelá. Nech dostala akokoľvek malý terč, vždy sa vypracovala a od istej doby ho neminula.



Problém: Čo znamená v matematike „od istej doby neminúť ľubovoľne malý terč“? Ako to zapísať (kvantifikovať)?

Limita postupnosti – dotýkanie sa nekonečna

Názorný príklad: Uvažujme postupnosť

$$a_n = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}, \text{ t.j. } M = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{101}{100}, \ldots\right\}.$$

Ak nám dá niekto nejaké číslo $\varepsilon > 0$ („veľkosť terčíka"), tak dokážeme v postupnosti nájsť člen, počnúc ktorým sa všetky ďalšie členy líšia od čísla 1 o menej ako ε, t.j. vieme nájsť $n_0 \in \mathbb{R}$ také, že všetky členy postupnosti, ktorých index je väčší ako n_0, spĺňajú nerovnosť $|a_n - 1| < \varepsilon$.
Ak to dokážeme urobiť pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$, tak sme takí dobrí (alebo lepší?) ako Anička!

> One says that a quantity is the limit of another quantity, if the second approaches the first closer than any given quantity, however small...
>
> D'Alembert: *Encyclopédie* (1765)

Definícia (limity postupnosti)

Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazývame limitou postupnosti $(a_n)_1^\infty$, akk pre každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in \mathbb{R}$ také, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ platí nerovnosť $|a_n - a| < \varepsilon$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Limita postupnosti – dotýkanie sa nekonečna

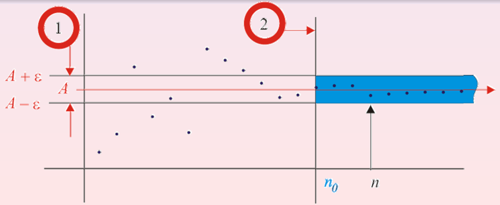
> When a variable quantity converges towards a fixed limit, it is often useful to indicate this limit by a specific notation, which we shall do by setting the abbreviation lim in front of the variable in question...
>
> Cauchy: *Cours d'Analyse* (1821)

Dohoda: Ak nejaký predpoklad nemusí platiť pre konečný počet členov, tak budeme hovoriť, že platí pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, t.j. od istého indexu počnúc: *výrok V (týkajúci sa prirodzených čísel) platí pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, akk* $(\exists n_1 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1) V(n)$.

Limita postupnosti preformulovaná po dohode

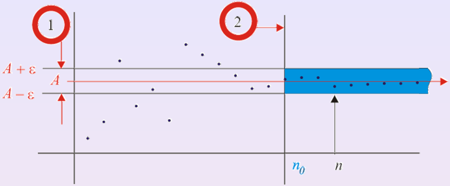
Číslo $a \in \mathbb{R}$ je limitou postupnosti $(a_n)_1^\infty$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ nerovnosť $|a_n - a| < \varepsilon$ platí pre skoro všetky prirodzené čísla n, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |a_n - a| < \varepsilon.$$



Limita postupnosti – dotýkanie sa nekonečna

Pripomenutie: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |a_n - a| < \varepsilon$



Postupnosť, ktorá má limitu, nazývame konvergentná. Postupnosť, ktorá nie je konvergentná, nazývame divergentná.

Úloha:

- dokážte, že postupnosť $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, je konvergentná;
- dokážte, že postupnosť $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, je divergentná;

Veta (o jednoznačnosti limity postupnosti)

Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.

Veta III.2

Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

Dôsledok: ak postupnosť nie je ohraničená, nemôže byť konvergentná!