Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

`umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html`

Prednáška 7

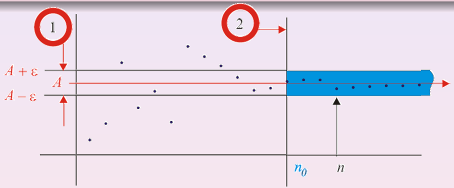
4. marca 2024

Limita postupnosti – dotýkanie sa nekonečna

Zopakovanie

Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazývame limitou postupnosti $(a_n)_1^\infty$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ nerovnosť $|a_n - a| < \varepsilon$ platí pre skoro všetky prirodzené čísla n, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |a_n - a| < \varepsilon.$$



Postupnosť, ktorá má limitu, nazývame konvergentná, napr. $a_n = \frac{1}{n}$.
Postupnosť, ktorá nie je konvergentná, nazývame divergentná, napr. $b_n = (-1)^n$.

- Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.
- Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

Operácie = mlynček na vytváranie nových postupností

Pripomenutie: postupnosť je funkcia definovaná na množine prirodzených čísel!

Zopakovanie (aritmetické operácie s postupnosťami)

Nech $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ sú postupnosti. Potom

(i) $(a_n \pm b_n)_1^\infty := (a_n)_1^\infty \pm (b_n)_1^\infty$;

(ii) $(a_n \cdot b_n)_1^\infty := (a_n)_1^\infty \cdot (b_n)_1^\infty$;

(iii) ak $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n \neq 0$, tak $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_1^\infty := \frac{(a_n)_1^\infty}{(b_n)_1^\infty}$.

Problém: Ako súvisia aritmetické operácie s limitou postupnosti?

Veta (aritmetické operácie s limitou postupnosti)

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Potom

(i) existuje $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

(ii) existuje $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;

(iii) ak $b \neq 0$, tak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Upozornenie: obrátené tvrdenie neplatí!

Veta (aritmetické operácie s limitou postupnosti): Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, tak

(i) existuje $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)$ a platí $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

(ii) existuje $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ a platí $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;

(iii) ak $b \neq 0$, tak existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ a platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Dôsledok

Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Potom

(i) existuje $\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n$ a platí $\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot a$;

(ii) existuje $\lim_{n\to\infty} a_n^k$ a platí $\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k$;

(iii) existuje $\lim_{n\to\infty} |a_n|$ a platí $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Úloha:

- dokážte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ pre každé $\alpha > 0$;
- vypočítajte $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n!}{(n+1)!}$;
- vypočítajte $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} \right)$.

Ďalšie elementárne nástroje na výpočet limít

Pozorovanie: ak aspoň jedna z postupností konverguje k 0, podľa Vety o aritmetických operáciách aj ich súčin konverguje k 0.
Nedá sa to ešte vylepšiť?

Veta III.3 („nula krát ohraničená“)

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a postupnosť $(b_n)_1^\infty$ je ohraničená. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ existuje a platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Úloha: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\cos n^2}{n+\sin n!}$.

Veta (o zovretí)

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ a $a_n \leq c_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Dôležité limity: Vyšetrite existenciu limít

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ pre $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.