Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
`umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html`

Prednáška 8

7. marca 2024

Ďalšie elementárne nástroje na výpočet limít

Pomáhať a chrániť. (Heslo Policajného zboru SR)

Veta (o zovretí)

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ a $a_n \leq c_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Pozorovanie: Ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, tak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Kedy to platí naopak?

Dôsledok

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

Úloha: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{n\to\infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha)$ pre $\alpha \in (0,1)$.

Veta III.4

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $|b_n| \leq |a_n|$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Ďalšie elementárne nástroje na výpočet limít

Pomáhať a chrániť. (Heslo Policajného zboru SR)

Veta (o zovretí)

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ a $a_n \leq c_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.
Potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Ponaučenie: Nech $x \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné. Potom $(\forall n \in \mathbb{N})$ $x - \frac{1}{n} < x$ a podľa Vety o hustote racionálnych a iracionálnych čísel v číslach reálnych existujú čísla $r_n \in \mathbb{Q}$ a $i_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ také, že

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x, \qquad x - \frac{1}{n} < i_n < x.$$

Podľa Vety o zovretí potom $r_n \to x$ a $i_n \to x$ pre $n \to \infty$.

T.j. pre každé reálne číslo existuje postupnosť racionálnych čísel a postupnosť iracionálnych čísel, ktoré k nemu konvergujú.

Veta III.5 (o vzťahu usporiadania a limity)

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

(i) Ak $a < b$, tak $a_n < b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ak $a_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $a \leq b$.

Otázka: platí tvrdenie „Ak $a \leq b$, tak $a_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$“?

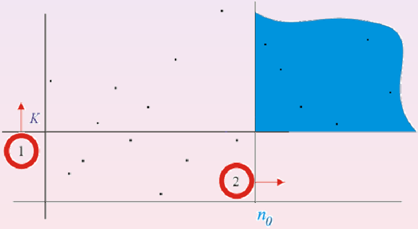
Nevlastná limita postupnosti

Zistenie: ak postupnosť nie je ohraničená, nemôže byť konvergentná! Môže sa ale správať nejak rozumne?

Definícia (nevlastnej limity postupnosti)

Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_1^\infty$ má nevlastnú limitu $+\infty$, akk $(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ a_n > K$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Hovoríme, že postupnosť $(a_n)_1^\infty$ má nevlastnú limitu $-\infty$, akk $(\forall L \in \mathbb{R})(\exists n_0)\ (\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ a_n < L$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.



Úloha: Dokážte z definície, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n-213} = +\infty$.

Nevlastná limita postupnosti – elementárne pozorovania

Pripomenutie: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff (\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ a_n > K$

Veta III.6

Ak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, tak $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Veta III.7

Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $a_n > 0$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Úloha: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}-4}{2+\sqrt[3]{n}}$.

Veta III.8 („policajti pre nevlastné limity“)

Nech $a_n \leq b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, tak $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

(ii) Ak $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, tak $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Úloha: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Nevlastná limita postupnosti – narábanie s nimi

Pripomenutie: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ a_n > K$

Veta (o operáciách s nevlastnými limitami)

Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(i) Ak $(b_n)_1^\infty$ je ohraničená zdola, tak $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

(ii) Ak $(b_n)_1^\infty$ je ohraničená zdola kladnou konštantou, tak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

Dôležitá limita:

Vyšetrite existenciu limity $\lim_{n\to\infty} q^n$ pre $q \in \mathbb{R}$.

Úloha: Vypočítajte (ak existuje) limitu

(i) $\lim_{n\to\infty}(n^5 - 2n^4 + n^3)$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}\right)$.

*von Kochova snehová vločka