Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 9

11. marca 2024

Monotónne postupnosti – zopakovanie pojmov

Pripomenutie: postupnosť je funkcia definovaná na množine prirodzených čísel!

Postupnosť $(a_n)_1^\infty$ nazývame

(i) rastúca, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\, a_{n+1} > a_n$;

(ii) klesajúca, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\, a_{n+1} < a_n$;

(iii) nerastúca, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\, a_{n+1} \leq a_n$;

(iv) neklesajúca, akk $(\forall n \in \mathbb{N})\, a_{n+1} \geq a_n$.

Supremom (infimom) postupnosti $(a_n)_1^\infty$ nazývame supremum (infimum) množiny členov postupnosti, t.j.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}, \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Poznámka: na základe Vety I.14 a Tvrdenia I.16 máme

(i) $a = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \ \Leftrightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N})\, a_n \leq a \ \wedge\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\, a - \varepsilon < a_{n_0}$;

(ii) $b = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n \ \Leftrightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N})\, b \leq b_n \ \wedge\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_1 \in \mathbb{N})\, b_{n_1} < b + \varepsilon$.

Monotónnosť + ohraničenosť = konvergencia

Pozorovanie: každá konvergentná postupnosť je ohraničená, ale naopak to neplatí (napr. pre $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$)!
Čo je potrebné pridať k ohraničenosti, aby postupnosť konvergovala?

Veta (o limite monotónnej postupnosti I.)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je neklesajúca postupnosť.

(i) Ak $(a_n)_1^\infty$ nie je ohraničená zhora, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Ak $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená zhora, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Pozorovanie: ak $(a_n)_1^\infty$ je neklesajúca postupnosť, tak $(-a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť, pre ktorú (ne)ohraničenosť plynie z (ne)ohraničenosti $(a_n)_1^\infty$

Veta (o limite monotónnej postupnosti II.)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je nerastúca postupnosť.

(i) Ak $(a_n)_1^\infty$ nie je ohraničená zdola, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(ii) Ak $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená zdola, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Veta (o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti)

Monotónna postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je ohraničená.

- význam vety je v tom, že umožňuje rozhodnúť o konvergencii (divergencii) danej postupnosti bez výpočtu jej limity
- vzhľadom na to, že konečný počet členov nerozhoduje o konvergencii postupnosti, veta ostáva v platnosti aj pre postupnosti monotónne pre skoro všetky prirodzené čísla, t.j. počnúc nejakým členom
- Veta o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti je ekvivalentná s Axiómou o hornej hranici!!!

Úloha 1

Vypočítajte (ak existuje) limitu

$$\lim_{n\to\infty} n^q, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Veta (o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti)

Monotónna postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je ohraničená.

- význam vety je v tom, že umožňuje rozhodnúť o konvergencii (divergencii) danej postupnosti bez výpočtu jej limity
- vzhľadom na to, že konečný počet členov nerozhoduje o konvergencii postupnosti, veta ostáva v platnosti aj pre postupnosti monotónne pre skoro všetky prirodzené čísla, t.j. počnúc nejakým členom
- Veta o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti je ekvivalentná s Axiómou o hornej hranici!!!

Úloha 2

Vyšetrite konvergenciu postupnosti $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{zlatý rez: } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}} \doteq 1{,}618033\dots$$

Veta (o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti)

Monotónna postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je ohraničená.

- význam vety je v tom, že umožňuje rozhodnúť o konvergencii (divergencii) danej postupnosti bez výpočtu jej limity
- vzhľadom na to, že konečný počet členov nerozhoduje o konvergencii postupnosti, veta ostáva v platnosti aj pre postupnosti monotónne pre skoro všetky prirodzené čísla, t.j. počnúc nejakým členom
- Veta o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti je ekvivalentná s Axiómou o hornej hranici!!!

Úloha 3

Vyšetrite konvergenciu postupnosti $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Historická poznámka: otázka určenia presnej hodnoty limity uvedenej postupnosti sa volala Bazilejský problém a vyriešil ju v roku 1735 LEONHARD EULER, keď dokázal, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Veta (o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti)

Monotónna postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je ohraničená.

- význam vety je v tom, že umožňuje rozhodnúť o konvergencii (divergencii) danej postupnosti bez výpočtu jej limity
- vzhľadom na to, že konečný počet členov nerozhoduje o konvergencii postupnosti, veta ostáva v platnosti aj pre postupnosti monotónne pre skoro všetky prirodzené čísla, t.j. počnúc nejakým členom
- Veta o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti je ekvivalentná s Axiómou o hornej hranici!!!

Úloha 4

Vyšetrite konvergenciu postupností

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$