Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1] ondrej.hutnik@upjs.sk

`umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html`

Prednáška 10

14. marca 2024

Veta (o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti)

Monotónna postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je ohraničená.

- význam vety je v tom, že umožňuje rozhodnúť o konvergencii (divergencii) danej postupnosti bez výpočtu jej limity
- vzhľadom na to, že konečný počet členov nerozhoduje o konvergencii postupnosti, veta ostáva v platnosti aj pre postupnosti monotónne pre skoro všetky prirodzené čísla, t.j. počnúc nejakým členom
- Veta o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti je ekvivalentná s Axiómou o hornej hranici!!!

Úloha 4

Vyšetrite konvergenciu postupností

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Monotónne postupnosti: Eulerovo číslo

Veta (o postupnostiach súvisiacich s Eulerovým číslom)

Nech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ a $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

(i) postupnosť $(a_n)_1^\infty$ je rastúca;

(ii) postupnosť $(b_n)_1^\infty$ je klesajúca;

(iii) $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_k < b_n$;

(iv) obe postupnosti sú ohraničené a $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n < 3$;

(v) $(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n - a_n < 3 \cdot \frac{1}{n}$.

- podľa Vety o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti obe postupnosti sú konvergentné!!!
- podľa častí (iii), (v) a Vety o zovretí máme

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < b_n - a_n < \frac{3}{n} \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Monotónne postupnosti: Eulerovo číslo

... ubi e denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est 1.

Leonhard Euler: *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita: instar supplementi ad commentar* (1736)

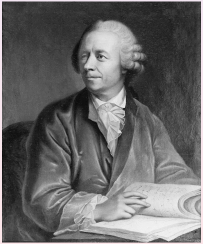
The letter e may now no longer be used to denote anything other than this positive universal constant (the solution of the equation $\ln x = 1$).

Edmund Landau: *Differential and Integral Calculus* (1934)

Definícia (Eulerovho čísla e)

Eulerovo číslo e je spoločnou hodnotou limít postupností $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$, t.j.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$



LEONHARD EULER (1707–1783)

Monotónne postupnosti: Eulerovo číslo

> Thus e became the first number to be defined by a limiting process.
>
> Eli Maor: *e: The Story of a Number* (1994)

Definícia (Eulerovho čísla e)

Eulerovo číslo e je spoločnou hodnotou limít postupností $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$, t.j.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Hodnota Eulerovho čísla e **na 1350 desatinných miest:** (zapamätať si, budem skúšať!!!)

2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595630738132328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149934884167509244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992069551702761838606261331384583000752044933826560297606737113200709328709127443747047230696977209310141692836819025515108657463772111252389784425056953696770785449969967946864454905987931636889230098793127736178215424999229576351482208269895193668033182528869398496465105820939239829488793320362509443117301238197068416140397019837679320683282376464804295311802328782509819455815301756717361332069811250996181881593041690351598888519345807273866738589422879228499892086805825749279610484198444363463244968487560233624827041978623209002160990235304369941849146314093431738143640546253152096183690888707016768396424378140592714563549061303107208510383750510115747704171898610687396965521267154688957035035402123407849819334321068170121005627880235193033224745015853904730419957777093503660416997329725088687696640355570716226844716256079882651787134195124665201030592123667719432527867539855894489697096409754591856956380236370162112047742722836489613422516445078182442352948636372141740238893441247963574370263755294448337998016125492278509257...

Monotónne postupnosti: Eulerovo číslo

Thus e became the first number to be defined by a limiting process.

Eli Maor: *e: The Story of a Number* (1994)

Definícia (Eulerovho čísla e)

Eulerovo číslo e je spoločnou hodnotou limít postupností $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$, t.j.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ako sa dopracovať k takému počtu desatinných miest?

Alternatívny prístup je pomocou postupnosti $e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Nech $m, n \in \mathbb{N}$ také, že $m > n$. Potom

$$0 < e_m - e_n = \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{m!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\dots m}\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1-\frac{1}{(n+1)^{m-n}}}{1-\frac{1}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)^{m-n}-1}{(n+1)^{m-n}}\cdot\frac{n+1}{n} < \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n\cdot n!}.$$

Z Archimedovej vlastnosti $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ \frac{1}{n_0\cdot n_0!} < \varepsilon$, a teda pre $m > n > n_0$ je $0 < e_m - e_n < \frac{1}{n_0\cdot n_0!} < \varepsilon$.

Postupnosť $(e_n)_1^\infty$ je preto fundamentálna, a teda konvergentná (jej limita je práve iracionálne Eulerovo číslo).

Eulerovo číslo – porovnanie rýchlosti konvergencie

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$
1	2,000	2,0
2	2,250	2,5
3	2,370	2,66
4	2,441	2,708
5	2,488	2,7166
6	2,522	2,71805
7	2,546	2,718253
8	2,566	2,7182787
9	2,581	2,71828152
10	2,594	2,718281801
11	2,604	2,7182818261
12	2,613	2,71828182828
13	2,621	2,718281828446
14	2,627	2,7182818284582
15	2,633	2,71828182845899
16	2,638	2,718281828459422
17	2,642	2,7182818284590507
18	2,646	2,71828182845904226
19	2,650	2,718281828459045349
20	2,653	2,7182818284590452339
21	2,656	2,71828182845904523593
22	2,659	2,718281828459045235360247
23	2,661	2,7182818284590452353602857
24	2,664	2,71828182845904523536028747404
25	2,666	2,718281828459045235360287474687
26	2,668	2,7182818284590452353602874747125
27	2,670	2,71828182845904523536028747471349
28	2,671	2,718281828459045235360287471352544

Môžeme veriť svojej vlastnej kalkulačke?

Príbeh: Otca práve narodeného syna, pána Nešetřila, upúta reklama vo výklade banky so sloganom „Iracionálne k šťastiu". Banka ponúka rodičom, aby založili pre narodené dieťa účet, na ktorý vložia e Eur. Banka sľubuje, že po každom roku odpočíta z účtu jedno Euro ako poplatok za vedenie účtu a zvyšok vynásobí počtom rokov od založenia účtu. V deň 25. narodenín banka dieťaťu vyplatí čiastku, ktorú preňho rodičia našetrili.

Ako **matematici**, začnime vyjadrovať čiastku p_n nasporenú v banke po n rokoch v Eur:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 1\cdot(\mathrm{e}-1) = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\dots\\
p_2 &= 2\cdot(p_1-1) = 2\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\dots\right)\\
p_3 &= 3\cdot(p_2-1) = 3\cdot 2\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\dots\right)\\
&\ \ \vdots\\
p_{24} &= 24\cdot(p_{23}-1) = 24!\left(\frac{1}{24!}+\frac{1}{25!}+\frac{1}{26!}+\frac{1}{27!}+\frac{1}{28!}+\dots\right)\\
p_{25} &= 25\cdot(p_{24}-1) = 25!\left(\frac{1}{25!}+\frac{1}{26!}+\frac{1}{27!}+\frac{1}{28!}+\frac{1}{29!}+\dots\right).
\end{aligned}
$$

Odhadneme hodnotu p_{25} pomocou geometrickej postupnosti, t.j. $1{,}0381 = 1+\frac{1}{26} < p_{25} < \frac{1}{1-\frac{1}{26}} = 1{,}04$.

Môžeme veriť svojej vlastnej kalkulačke?

Príbeh: Otca práve narodeného syna, pána Nešetřila, upúta reklama vo výklade banky so sloganom „Iracionálne k šťastiu“. Banka ponúka rodičom, aby založili pre narodené dieťa účet, na ktorý vložia e Eur. Banka sľubuje, že po každom roku odpočíta z účtu jedno Euro ako poplatok za vedenie účtu a zvyšok vynásobí počtom rokov od založenia účtu. V deň 25. narodenín banka dieťaťu vyplatí čiastku, ktorú preňho rodičia našetrili.

A čo je na tom zaujímavé, že sú o tom tri slajdy na tejto prednáške? Počítali by takto aj bežní smrteľníci? Určite NIE! Veď dnes máme kalkulačky, počítače, mobily a pod. Takže ako by to s nimi vyzeralo?

(a) Bežná kalkulačka má 10-ciferný displej, a tak zoberie Eulerovo číslo s 9 platnými číslami za desatinnou čiarkou, t.j. $\mathrm{e} \doteq 2{,}718281829$. Uplatnením popísaného algoritmu kalkulačka vyhodí výsledok $p_{25} = 0{,}839 \times 10^{16}$ (slušný obnos peňazí!).

(b) Kalkulačka počítača pracuje so 16 ciframi, a tak podľa uvedeného algoritmu počítačová kalkulačka dá výsledok $p_{25} = -0{,}365 \times 10^{10}$ (slušné manko!)

Vidíme, že skutočná výška usporených peňazí p_{25} sa podstatne líši od výsledkov, ktoré dostaneme pomocou kalkulačky mobilu alebo kalkulačky počítača. Paradoxné je, že aj keď napr. displeje rôznych mobilov umožňujú pracovať s rovnakým počtom platných miest, môžeme dostať rôzne výsledky (skúste si výpočet p_{25} aj s mobilmi svojich spolužiakov!). Ako je to možné? Môžeme vôbec dôverovať výsledkom, ktoré dostaneme pomocou výpočtovej techniky?

Čo sa za týmto všetkým skrýva? Prvým krokom k pochopeniu zdanlivého paradoxu je zistenie, že zabudované programy pre násobenie a sčítanie sú rôzne. Môžu sa líšiť v tom, ako a kedy zaokrúhľujú, či je to pred prevodom do dvojkovej sústavy, či po ňom, atď. Zistiť, akú zaokrúhľovaciu taktiku vlastne váš počítač používa, je takmer nemožné.

ZDROJ: Pelantová, E., Znojil, M.: *Můžeme věřit své vlastní kalkulačce?* Rozhledy matematicko-fyzikální 85(4) (2010), 11–18.

Môžeme veriť svojej vlastnej kalkulačke? To určite...

Príbeh: Otca práve narodeného syna, pána Nešetřila, upúta reklama vo výklade banky so sloganom „Iracionálne k šťastiu“. Banka ponúka rodičom, aby založili pre narodené dieťa účet, na ktorý vložia e Eur. Banka sľubuje, že po každom roku odpočíta z účtu jedno Euro ako poplatok za vedenie účtu a zvyšok vynásobí počtom rokov od založenia účtu. V deň 25. narodenín banka dieťaťu vyplatí čiastku, ktorú preňho rodičia našetrili.

Bystrému pozorovateľovi môže napadnúť, že k vyriešeniu celej záhady by mohlo pomôcť použitie algoritmu, ktorý by počítal na viac platných cifier. Avšak používanie viac platných cifier nemusí veľa riešiť (ak vopred nevieme, koľko ich treba zobrať).

počet platných miest	p_{25}
17	$-0{,}54848 \times 10^9$
18	$0{,}71967 \times 10^8$
19	$-0{,}55884 \times 10^7$
20	615990
21	$-4457{,}9$
22	$-4457{,}9$
23	195,37
24	40,262
25	$-6{,}2713$
26	1,4842
27	1,0189
28	1,0344
29	1,0406
30	1,0399
31	1,0399

Monotónne postupnosti: Eulerovo číslo

Thus e became the first number to be defined by a limiting process.

Eli Maor: *e: The Story of a Number* (1994)

Definícia (Eulerovho čísla e)

Eulerovo číslo e je spoločnou hodnotou limít postupností $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$, t.j.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ponaučenie: z definície a predchádzajúcich vlastností postupností $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ plynie, že

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

„Pro koumáky“: Je jasné, že pre každé prirodzené číslo $n > 1$ je $n! < n^n$, resp. ekvivalentne $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < 1$. Ako ďaleko od jednotky je podiel $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$? Odpoveďou je **Stirlingova formula** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Hint na dôkaz:
(a) Pomocou nerovnosti pre Eulerovo číslo dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť $(n-1)! \leq n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e} \leq n!$
(b) Použitím (a) dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\mathrm{e}^{1/n}}{\mathrm{e}} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{\mathrm{e}^{1/n} n^{1/n}}{\mathrm{e}}.$$

Na záver použite Vetu o zovretí.

Monotónne postupnosti: Eulerovo číslo

> Thus e became the first number to be defined by a limiting process.
>
> Eli Maor: *e: The Story of a Number* (1994)

Definícia (Eulerovho čísla e)

Eulerovo číslo e je spoločnou hodnotou limít postupností $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$, t.j.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Otázka: Stane sa niečo, keď namiesto n zoberieme inú postupnosť idúcu do $+\infty$?

Veta III.9

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Potom

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e}.$$

Dôsledok

$(\forall x \in \mathbb{R})\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$

Ponaučenie: máme (jednoznačne) analyticky vyjadrenú exponenciálnu funkciu e^x!

Vybrané postupnosti

Treba si vedieť správne vybrať... Život je predsa otázka priorít!

Ako vieme doteraz zdôvodniť, že nejaká postupnosť je divergentná?
(i) z definície: ukážeme, že žiadne reálne číslo nie je jej limitou – pracné a neefektívne!
(ii) vyšetríme monotónnosť a ohraničenosť – no super, dvojnásobná práca...
Neexistuje niečo jednoduchšie a efektívnejšie?

Definícia (vybranej postupnosti)

Nech $(a_n)_1^\infty$ je postupnosť a $(k_n)_1^\infty$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Postupnosť $(a_{k_n})_1^\infty$ nazývame vybranou postupnosťou z postupnosti $(a_n)_1^\infty$ pomocou postupnosti $(k_n)_1^\infty$.

Lema III.10

Ak $(k_n)_1^\infty$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel, tak $(\forall n \in \mathbb{N})\ k_n \geq n$.

Veta III.11

Ak postupnosť má vlastnú alebo nevlastnú limitu, potom každá z nej vybraná postupnosť má takú istú limitu.

Ponaučenie: ak nájdeme dve vybrané postupnosti z postupnosti $(a_n)_1^\infty$, ktoré majú dve rôzne limity, potom $(a_n)_1^\infty$ diverguje!

Veta (Cantorov princíp do seba vložených uzavretých intervalov)

Nech $(\forall n \in \mathbb{N})$ $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$. Ak $(\forall n \in \mathbb{N})$ $I_n \supset I_{n+1}$, tak $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Ak naviac $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, potom

$$(\exists! c \in \mathbb{R}) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = c.$$

GEORG CANTOR (1845–1918)

Veta (Cantorov princíp do seba vložených uzavretých intervalov)

Nech $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n = \langle a_n, b_n \rangle$. Ak $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n \supset I_{n+1}$, tak $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Ak naviac $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, potom

$$(\exists! c \in \mathbb{R})\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = c.$$

- podmienka uzavretosti intervalov sa nedá vynechať! Napr. pre $I_n = (0, \frac{1}{n}\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.
- Cantorov princíp neplatí v $\mathbb{Q}$! Napr. pre $I_n = \langle \sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- dá sa ukázať ešte viac: Cantorov princíp + Archimedova vlastnosť je ekvivalentný s Axiómou o hornej hranici!!!
- Cantorov princíp sa vhodne uplatňuje v mnohých situáciách, keď chceme určiť hodnotu nejakého čísla so zadanou presnosťou (napr. koreň polynómu) – princíp je založený na metóde bisekcie (delenia intervalu na polovicu)

Pozorovanie: z postupnosti $a_n = (-1)^n$ vieme vybrať konvergentnú postupnosť $a_{2n} \equiv 1$. Dá sa to urobiť vždy?

Veta (Bolzanova-Weierstrassova)

Z každej (nekonečnej) ohraničenej postupnosti sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť.

BERNARD BOLZANO (1781–1848)

CARL WEIERSTRASS (1815–1897)

Tvrdenie III.12

Z každej neohraničenej postupnosti možno vybrať podpostupnosť, ktorá má nevlastnú limitu.