Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

`umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html`

Prednáška 11

18. marca 2024

Veta (Cantorov princíp do seba vložených uzavretých intervalov)

Nech $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n = \langle a_n, b_n \rangle$. Ak $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n \supset I_{n+1}$, tak $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Ak naviac $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, potom

$$(\exists! c \in \mathbb{R}) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}.$$

GEORG CANTOR (1845–1918)

Veta (Cantorov princíp do seba vložených uzavretých intervalov)

Nech $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n = \langle a_n, b_n \rangle$. Ak $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n \supset I_{n+1}$, tak $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Ak naviac $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, potom

$$(\exists! c \in \mathbb{R}) \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{c\}.$$

- podmienka uzavretosti intervalov sa nedá vynechať! Napr. pre $I_n = (0, \frac{1}{n}\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.
- Cantorov princíp neplatí v $\mathbb{Q}$! Napr. pre $I_n = \langle \sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\sqrt{2}\}$, ale $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- dá sa ukázať ešte viac: Cantorov princíp + Archimedova vlastnosť je ekvivalentný s Axiómou o hornej hranici!!!
- Cantorov princíp sa vhodne uplatňuje v mnohých situáciách, keď chceme určiť hodnotu nejakého čísla so zadanou presnosťou (napr. koreň polynómu) – princíp je založený na metóde bisekcie (delenia intervalu na polovicu)

Pozorovanie: z postupnosti $a_n = (-1)^n$ vieme vybrať konvergentnú postupnosť $a_{2n} \equiv 1$. Dá sa to urobiť vždy?

Veta (Bolzanova-Weierstrassova)

Z každej (nekonečnej) ohraničenej postupnosti sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť.

BERNARD BOLZANO (1781–1848)

CARL WEIERSTRASS (1815–1897)

Tvrdenie III.12

Z každej neohraničenej postupnosti možno vybrať podpostupnosť, ktorá má nevlastnú limitu.

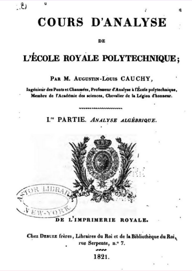
Fundamentálne postupnosti (netreba rátať limity!)

Otázka: dá sa vyšetriť konvergencia postupnosti bez toho, aby sme počítali jej limitu?

Definícia

Postupnosť $(a_n)_1^\infty$ nazývame fundamentálna (cauchyovská), akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

AUGUSTIN LUIS CAUCHY (1789–1857)

Úloha: Zistite, či postupnosť $a_n = \frac{2n-1}{n-3}$, $n \geq 4$, je fundamentálna.

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie postupnosti)

Postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je fundamentálna.

AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857)

BERNARD BOLZANO (1781–1848)

Dôsledok

Postupnosť $(a_n)_1^\infty$ konverguje práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie postupnosti)

Postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je fundamentálna.

- význam vety je v tom, že umožňuje rozhodnúť o konvergencii (divergencii) danej postupnosti bez výpočtu jej limity, napr.

$$a_n = 1 + \frac{\cos 1}{2} + \cdots + \frac{\cos n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N};$$

- veta opäť neplatí v množine $\mathbb{Q}$, t.j. nie každá fundamentálna postupnosť je konvergentná v $\mathbb{Q}$!
- vo funkcionálnej analýze majú priestory, v ktorých každá fundamentálna postupnosť konverguje, výsostné postavenie – nazývajú sa úplné;
- dá sa ukázať, že Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie postupnosti je ekvivalentné s Axiómou o hornej hranici!!!

Malé zastavenie sa alebo návrat k počiatkom...

Archimedes Kepler 1615 Fermat 1638	$\Rightarrow$	Newton 1665 Leibniz 1675	$\Rightarrow$	Cauchy 1821 Weierstrass	$\Rightarrow$	Cantor 1875 Dedekind
integrál	$\Rightarrow$	derivácia	$\Rightarrow$	limity, spojité funkcie	$\Rightarrow$	množiny, zobrazenia

– Čo je to vlastne **integrál**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **derivácia**? Odpoveď: Limita

– Čo je to vlastne **súčet nekonečného radu**? Odpoveď: Limita

– A čo je to **limita**? Odpoveď: Číslo

A čo vlastne to **číslo** je???

Čo sú to (reálne) čísla?

> ... the definition of irrational numbers, on which geometric representations have often had a confusing influence... I take in my definition a purely formal point of view, *calling some given symbols numbers*, so that the existence of these numbers is beyond doubt.
>
> Eduard Heine: *Die Elemente der Funktionenlehre* (1872)

> At that point, my sense of dissatisfaction was so strong that I firmly resolved to start thinking until I should find a purely arithmetic and absolutely rigorous foundation of the principles of infinitesimal analysis... I achieved this goal on November 24th, 1858, ... but I could not really decide upon a proper publication, because, firstly, the subject is not easy to present, and, secondly, the material is not very fruitful.
>
> Richard Dedekind: *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872)

> $\sqrt{3}$ is thus only a symbol for a number which has yet to be found, but is not its definition. This definition is, however, satisfactorily given by my method as, say $\{1{,}7,\ 1{,}73,\ 1{,}732,\ \dots\}$
>
> Georg Cantor: *Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstraß-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen* (1889)

Dnes vieme elegantne odpovedať na položenú otázku:
Reálne čísla sú

- triedy ekvivalencií racionálnych Cauchyovských postupností;
- Dedekindove rezy na množine racionálnych čísel;
- jediné najmenšie úplné komutatívne archimedovské pole.

Povzbudenie: nevešajte hlavu, ak stále nerozumiete aspoň polovici uvedených slov!

Cantorova konštrukcia reálnych čísel

Relácia ekvivalencie: Racionálne cauchyovské postupnosti $(a_n)_1^\infty$ a $(b_n)_1^\infty$ nazveme ekvivalentné, akk $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Zapisujeme $(a_n)_1^\infty \sim (b_n)_1^\infty$.

Relácia $\sim$ má tieto vlastnosti:

- reflexivita: $(a_n)_1^\infty \sim (a_n)_1^\infty$;
- symetria: $(a_n)_1^\infty \sim (b_n)_1^\infty \;\Rightarrow\; (b_n)_1^\infty \sim (a_n)_1^\infty$;
- tranzitivita: $(a_n)_1^\infty \sim (b_n)_1^\infty \;\wedge\; (b_n)_1^\infty \sim (c_n)_1^\infty \;\Rightarrow\; (a_n)_1^\infty \sim (c_n)_1^\infty$;

teda $\sim$ je relácia ekvivalencie na množine všetkých racionálnych cauchyovských postupností. Preto je možné rozčleniť túto množinu na tzv. triedy ekvivalencií

$$\overline{(a_n)_1^\infty} = \left\{(b_n)_1^\infty; (b_n)_1^\infty \text{ je racionálna cauchyovská postupnosť taká, že } (b_n)_1^\infty \sim (a_n)_1^\infty\right\}.$$

Cantor: reálne čísla sú triedy ekvivalencií racionálnych Cauchyovských postupností, t.j.

$$\mathbb{R} = \left\{\overline{(a_n)_1^\infty}; (a_n)_1^\infty \text{ je racionálna cauchyovská postupnosť}\right\}.$$

Poznámka: k praktickému narábaniu s takto definovanými číslami je ešte dlhá cesta (operácie, usporiadanie, abs. hodnota...).