Prednáška č. 11

Fundamentálne postupnosti

Definícia. Postupnosť $(a_n)_1^\infty$ nazývame *fundamentálna* (*cauchyovská*), akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Príklad. Zistite, či postupnosť $a_n = \dfrac{2n-1}{n-3}$, $n \geq 4$, je fundamentálna.

Riešenie: Pozrime sa na rozdiel $|a_n - a_m|$, či ho vieme počnúc nejakým okamihom urobiť ľubovoľne malým, t.j.

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= \left|\frac{2n-1}{n-3} - \frac{2m-1}{m-3}\right| = \left|\frac{(2n-1)(m-3) - (2m-1)(n-3)}{(n-3)(m-3)}\right| \\
&= \left|\frac{2mn - 6n - m + 3 - 2mn + 6m + n - 3}{(n-3)(m-3)}\right| = \left|\frac{5m - 5n}{(n-3)(m-3)}\right| \\
&= \left|\frac{5(m-3) - 5(n-3)}{(n-3)(m-3)}\right| = \left|\frac{5}{n-3} - \frac{5}{m-3}\right| \leq \frac{5}{n-3} + \frac{5}{m-3} \leq \frac{20}{n} + \frac{20}{m}.
\end{aligned}$$

Ale $n \geq 4$, teda $\frac{n}{4} \geq 1$, čiže $-\frac{n}{4} \leq -1$. Potom $n - 3 = n + 3(-1) \geq n + 3(-\frac{n}{4}) = \frac{n}{4}$. Analogicky $m - 3 \geq \frac{m}{4}$. Ak tieto nerovnosti prevrátime, dostávame, že pre každé prirodzené čísla m, n platí

$$\frac{5}{n-3} + \frac{5}{m-3} \leq \frac{5}{\frac{n}{4}} + \frac{5}{\frac{m}{4}} = \frac{20}{n} + \frac{20}{m}.$$

Vidíme, že oba posledné výrazy vieme urobiť ľubovoľne malými (podľa Archimedovho princípu), a teda ak vezmeme ľubovoľné $\varepsilon > 0$, nerovnosť

$$\frac{20}{n} + \frac{20}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

bude platiť pre každé prirodzené $m, n \geq n_0$, kde $n_0 = \frac{40}{\varepsilon}$. Netreba ale zabudnúť, že naša postupnosť je definovaná len pre prirodzené čísla väčšie alebo rovné 4, a preto hľadané $n_0 = \max\{4, \frac{40}{\varepsilon}\}$. Zhrnutím máme, že

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists n_0 = \max\left\{4, \frac{40}{\varepsilon}\right\}\right)(\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\ |a_n - a_m| \leq \frac{20}{n} + \frac{20}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

teda $(a_n)_1^\infty$ je fundamentálna. Naviac, ľahko sa presvedčíme, že $(a_n)_1^\infty$ je konvergentná.

Ako spolu tieto pojmy súvisia vo všeobecnosti?

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie postupnosti). *Postupnosť je konvergentná práve vtedy, keď je fundamentálna.*

Dôkaz. $\Rightarrow$ Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, t.j.

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0\right)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\left(\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2} > 0\right)(\exists n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)\ |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom $(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

teda $(a_n)_1^\infty$ je fundamentálna.

$\Leftarrow$ Nech $(a_n)_1^\infty$ je fundamentálna. Myšlienkou dôkazu je najprv ukázať, že
(i) $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená,
(ii) potom na ňu aplikovať Bolzanovu-Weierstrassovu vetu (vybrať konvergentnú podpostupnosť) a
(iii) nakoniec ukázať, že keď v nej existuje vybraná konvergentná podpostupnosť, tak aj celá postupnosť $(a_n)_1^\infty$ je konvergentná.

(i) Na dôkaz ohraničenosti fundamentálnej postupnosti použijeme rovnaký postup ako v dôkaze vzťahu medzi konvergenciou a ohraničenosťou. Keďže $(a_n)_1^\infty$ je fundamentálna, tak

$$(\forall \varepsilon > 0, \varepsilon = 1)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m \geq n_0)\ |a_n - a_m| < 1.$$

Potom aj pre $m = n_0 + 1$ platí

$$|a_n - a_{n_0+1}| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_{n_0+1} - 1 < a_n < a_{n_0+1} + 1$$

pre každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, a teda množina $B = \{a_n; n \geq n_0\}$ je ohraničená. Keďže $A = \{a_n; n \leq n_0\}$ je konečná, tak $(a_n)_1^\infty$ je ohraničená.

(ii) Podľa Bolzanovej-Weierstrassovej vety sa z nej dá vybrať podpostupnosť $a_{k_n} \to a$ pre $n \to \infty$.

(iii) Posledným krokom je ukázať, že $a_n \to a$ pre $n \to \infty$. Z fundamentálnosti $(a_n)_1^\infty$ máme, že

$$\left(\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0\right)(\exists n_1)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_1)\ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

a z definície limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$ máme, že

$$\left(\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0\right)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2)\ |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, k_{n_2}\}$ a zoberme $k_n > n_0$ a $m = k_n$. Potom $|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ a

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - a)| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

teda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\square$

$(a_n)_1^\infty$ je *fundamentálna*, akk $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N}, m > n_0)\ \lvert a_n - a_m \rvert < \varepsilon$.

Dôsledok. Postupnosť $(a_n)_1^\infty$ konverguje práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon.$$

C-B kritérium má veľký teoretický význam, zriedka sa však využíva pri počítaní limity zadanej postupnosti. Existujú však postupnosti, o ktorých vieme pomocou C-B kritéria dokázať, že sú konvergentné, ale nevieme nájsť ich limitu. Uvažujme napríklad postupnosť

$$a_n = 1 + \frac{\cos 1}{2} + \cdots + \frac{\cos n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podľa dôsledku sa stačí pozrieť na rozdiel

$$\begin{aligned}|a_n - a_{n+k}| &= \left|\frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\cos(n+k)}{2^{n+k}}\right| \leq \frac{|\cos(n+1)|}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{|\cos(n+k)|}{2^{n+k}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon,\end{aligned}$$

tak dostávame, že

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists n_0 = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon,$$

teda postupnosť $(a_n)_1^\infty$ je fundamentálna, a teda konvergentná. Avšak určiť hodnotu (vypočítať) limitu tejto postupnosti nedokážeme.

Nekonečné číselné rady

Naďalej budeme používať poznatky o limitách postupností. Uvažujme postupnosť reálnych čísel $(a_n)_1^\infty$. Tejto postupnosti priradíme postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nasledovne:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

Symbol $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$, alebo skrátene $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, budeme nazývať *nekonečný číselný rad* alebo kratšie rad. Prvok a_n nazývame n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nazývame *postupnosť čiastočných súčtov* (skrátene p.č.s.) *radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a prvok s_n n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Príklad. Nájdite n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.

Riešenie: Dosadením do predpisu postupnosti $(s_n)_1^\infty$ máme

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = 1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \\ &\vdots \\ s_n &= \begin{cases} 1, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Odtiaľ vidieť, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje. Práve s existenciou tejto limity súvisí konvergencia radu.

Definícia. *Súčtom radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame konečnú limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov a zapisujeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s < +\infty$. Rad sa nazýva *konvergentný*, akk konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov. Rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame *divergentný*.