Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

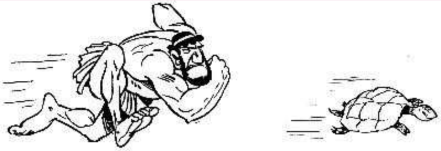
Prednáška 12

21. marca 2024

Prvý dotyk s nekonečnými radmi

ZENÓN Z ELEY (asi 490 p.n.l. – 430 p.n.l.)

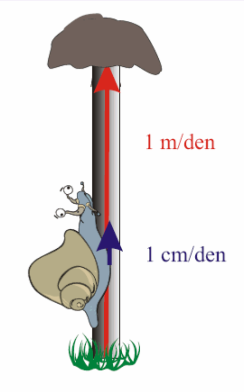
Apória o Achillovi a korytnačke: Jedného dňa sa konal závod medzi korytnačkou a Achillom na trati dlhej 100 metrov. Keďže Achilles je 10 krát rýchlejší ako korytnačka, dostala korytnačka náskok 10 metrov. Závod sa začal. Kým Achilles ubehol 10 metrov a dostal sa na štartovaciu pozíciu korytnačky, korytnačka ubehla nejaký kus ďalej. Achilles sa dostal aj na toto miesto, ale korytnačka bola zase o kúsok ďalej. Táto situácia sa neustále opakuje.
Dobehne Achilles korytnačku?



Druhý dotyk s nekonečnými radmi

Predstavme si pomalého slimáka, ktorý lezie smerom hore po rýchlorastúcom hríbe.

Dolezie slimák niekedy na vrchol hríba?

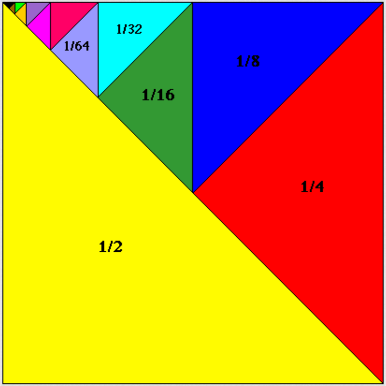


Tretí dotyk s nekonečnými radmi

Majme n identických kariet. Ako najďalej za hranu stola môže vyčnievať kopa kariet bez toho, aby spadla?

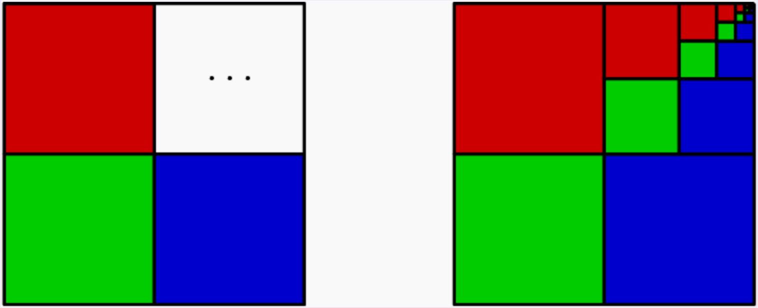
http://mathworld.wolfram.com/BookStackingProblem.html

Toto keby videl Zenón...



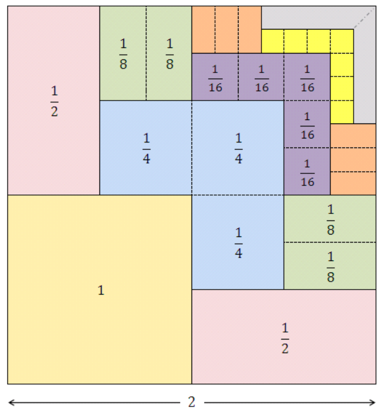
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$$

Toto keby videl Zenón...



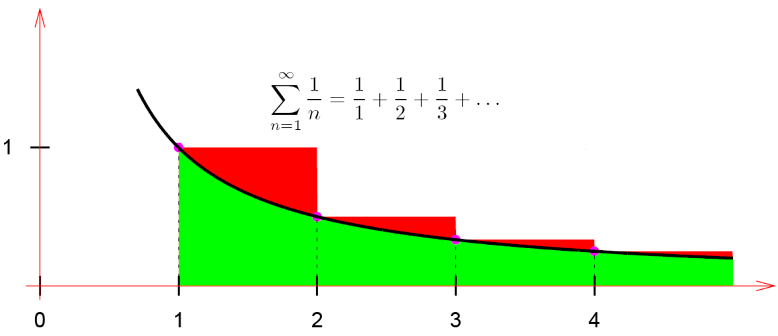
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{1}{3}$$

Toto keby videl Zenón...



$$1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + \cdots = 4$$

Toto keby videl slimák... (aj s kopou kariet)

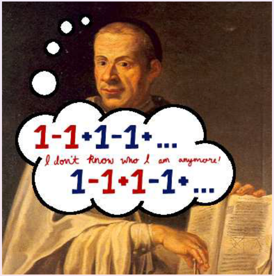


http://scipp.ucsc.edu/~haber/archives/physics116A10/harmapa.pdf

Ako definovať súčet nekonečného číselného radu?

$$\textit{Grandiho rad}\ (1703): \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + ((-1)+1) + ((-1)+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1 \\ (1+(-1)) + (1+(-1)) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 0$$



Guido Grandi (1671–1742)

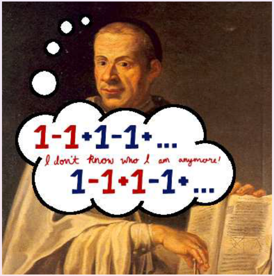
Grandi's argument is interesting, but wrong because it causes contradictions... The mistake is caused by the use of a series from which it is impossible to get any conclusion. In fact, it doesn't happen that if we stop this series, the following terms can be neglected in comparison with preceding terms; this property is verified only for convergent series...

Jacopo Riccati: *Saggio intorno al sistema dell'universo* (1754)

Ako definovať súčet nekonečného číselného radu?

$$\textcolor{red}{\textit{Grandiho rad }(1703)}: \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + ((-1)+1) + ((-1)+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \\ (1+(-1)) + (1+(-1)) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \textcolor{red}{1 = 0}$$



GUIDO GRANDI (1671–1742)

Now if, therefore, the series is taken to infinity and (consequently) the number of terms cannot be regarded as either even or odd, it cannot be concluded that the sum is either 0 or 1, but we ought to take a certain median value which differs equally from both, namely $1/2$.

Leonhard Euler: *Institutiones calculi differentialis* (1755)

Ako definovať súčet nekonečného číselného radu?

> We call a *series* an indefinite sequence of quantities, $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$, which follow from one to another according to a determined law... Let $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ to be the sum of the first n terms, where n denotes any integer number. If, for ever increasing values of n, the sum s_n indefinitely approaches a certain limit s, the series is said to be convergent, and the limit in question is called the sum of the series. On the contrary, if the sum s_n does not approach any fixed limit as it increases infinitely, the series is divergent, and does not have a sum. In either case, the term which corresponds to the index n, that is u_n, is what we call the general term. For the series to be completely determined, it is enough that we give its general term as a function of the index n.
>
> Luis Augustin Cauchy: *Cours d'analyse* (1821)

Postupnosti $(a_n)_1^\infty$ priradíme postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nasledovne:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_{n+1} &= a_1 + \cdots + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Symbol $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$, alebo skrátene $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, budeme nazývať nekonečný číselný rad. Prvok a_n nazývame n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nazývame postupnosť čiastočných súčtov (p.č.s.) radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a prvok s_n n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ako definovať súčet nekonečného číselného radu?

Definícia

Súčtom radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame konečnú limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov a zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s < +\infty$. Rad sa nazýva konvergentný, akk konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov. Rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame divergentný.

Pre rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ môže nastať práve jeden z nasledujúcich prípadov:

- $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný a má súčet s;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $+\infty$;
- $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje do $-\infty$;
- neexistuje ani vlastná ani nevlastná limita p.č.s. ... rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ osciluje

Nekonečný číselný rad a jeho súčet – elementárne príklady

Notable enough, however, are the controversies over the series $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, whose sum was given by Leibniz as 1/2, although others disagree... the controversy turns on the question whether the series of this type have a certain sum. Understanding of this question is to be sought in the word "sum"... we should in general give up this idea of sum for divergent series...

Leonhard Euler: *De seriebus divergentibus* (1760)

Geometrický rad: $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n$, kde $a \neq 0$, $q \neq 0$

(i) ak $q = 1$, tak $s_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n} = a \cdot n \to \pm\infty$, teda geometrický rad divergenuje do $\pm\infty$;

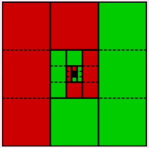
(ii) ak $q = -1$, tak $s_n = a + (-a) + \cdots + (-1)^{n+1} a = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ a, & n = 2k - 1 \end{cases}$, teda geometrický (Grandiho) rad osciluje;

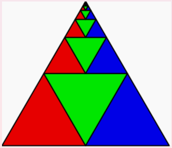
(iii) ak $|q| \neq 1$, tak $s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) = a\frac{1-q^n}{1-q}$ a máme tri možnosti:

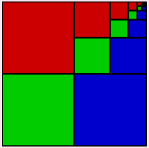
(iii$_1$) pre $|q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, čiže $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$, t.j. geometrický rad konverguje;

(iii$_2$) pre $q > 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, čiže $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, t.j. geometrický rad diverguje do $\pm\infty$;

(iii$_3$) pre $q < -1$ neexistuje $\lim_{n\to\infty} q^n$, čiže $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, t.j. geometrický rad osciluje;







Nekonečný číselný rad a jeho súčet – elementárne príklady

Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever.

Niels Henrik Abel: *Ouevres* (1826)

Harmonický rad: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

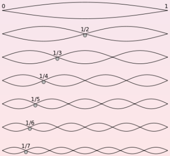
– každý člen harmonického radu je harmonickým priemerom dvoch susedných členov, t.j. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}}{2}$;

– členy radu určujú vlnovú dĺžku vyšších harmonických tónov základného tónu (v postupnosti prima, oktáva, kvinta, kvarta, veľká tercia, malá tercia, atď.);

– Nicola Oresme (1323–1382) ako prvý dokázal okolo roku 1350 divergenciu harmonického radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = +\infty$$

– **Iný dôkaz**: Keďže $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} \iff n\,(\ln(n+1) - \ln n) < 1 \iff \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$, postupným dosadzovaním hodnôt n a sčítaním týchto nerovností máme $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\ln(n+1) - \ln 1 < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = s_n$. Keďže $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, podľa policajtov pre nevlastné limity aj $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.



Pripomenutie: na konvergenciu radu sa pozeráme cez konvergenciu postupnosti jeho čiastočných súčtov!

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie radu)

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje práve vtedy, keď p.č.s. $(s_n)_1^{\infty}$ je fundamentálna, t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |s_n - s_{n+k}| < \varepsilon.$$

AUGUSTIN CAUCHY (1789–1857)

BERNARD BOLZANO (1781–1848)

Dôsledok (nutná podmienka konvergencie radu)

Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

The sum of an infinite series whose final term vanishes perhaps is infinite, perhaps finite.

Jacob Bernoulli: *Ars conjectandi* (vydané posmrtne v roku 1713)