Prednáška č. 12

Nekonečné číselné rady

Naďalej budeme používať poznatky o limitách postupností. Uvažujme postupnosť reálnych čísel $(a_n)_1^\infty$. Tejto postupnosti priradíme postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nasledovne:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + \cdots + a_n = s_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

Symbol $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$, alebo skrátene $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, budeme nazývať *nekonečný číselný rad* alebo kratšie rad. Prvok a_n nazývame n-tý člen radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Postupnosť $(s_n)_1^\infty$ nazývame *postupnosť čiastočných súčtov* (skrátene p.č.s.) *radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a prvok s_n n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Príklad. Nájdite n-tý čiastočný súčet radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.

Riešenie: Dosadením do predpisu postupnosti $(s_n)_1^\infty$ máme

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = 1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \\ &\vdots \\ s_n &= \begin{cases} 1, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Odtiaľ vidieť, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje. Práve s existenciou tejto limity súvisí konvergencia radu.

Definícia. *Súčtom radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame konečnú limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov a zapisujeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s < +\infty$. Rad sa nazýva *konvergentný*, akk konverguje postupnosť jeho čiastočných súčtov. Rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame *divergentný*.

Položme si otázku, aké vlastnosti musí mať rad, aby konvergoval, t.j. aby existovala konečná limita postupnosti čiastočných súčtov. Z definície je zrejmý úzky súvis medzi nekonečnými radmi a postupnosťami, ktorý sa niekde ešte zvýrazňuje tým, že rad sa definuje ako dvojica postupností $((a_n)_1^\infty, (s_n)_1^\infty)$. Teda vety o konvergencii radov sa dajú previesť na vety o konvergencii postupností a obrátene. Uplatnením tohto poznatku máme priamo jednu nutnú a postačujúcu podmienku pre konvergenciu radov.

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie radov)**.** *Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje práve vtedy, keď p.č.s.* $(s_n)_1^\infty$ *je fundamentálna, t.j.*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ |s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Ako triviálny dôsledok tohto tvrdenia (pre $k = 1$) dostávame, že ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1} - 0| < \varepsilon,$$

teda dostávame poznatok známy už Pietrovi Mengolimu v roku 1650.

Veta (nutná podmienka konvergencie radu). *Ak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Alternatívne sa o platnosti uvedenej vety môžeme presvedčiť použitím vzťahu $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ a prejdením k limite pre $n \to \infty$.

Poznámka. Je treba upozorniť, že podmienka nulovej limity postupnosti členov radu nie je postačujúca k jeho konvergencii. Zoberme harmonický rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Zrejme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ale harmonický rad diverguje, ako nám to prvý dokázal v roku 1350 Nicola Oresme. Častokrát sa však na vyšetrenie konvergencie používa jej **obmenená verzia**, t.j. ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Príklad. Vyšetrite konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$.

Riešenie: Nebudeme hľadať postupnosť čiastočných súčtov tohto radu, k jej rozumnému vyjadreniu by sme potrebovali poznať nejaké súčtové vzorce. Oveľa jednoduchšie overíme nutnú podmienku konvergencie radu, a teda $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} \neq 0$. Na základe nutnej podmienky konvergencie radu uvedený rad diverguje. □

Príklad. Vyšetrite konvergenciu **Riemannovho radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$.

Riešenie: Najprv vybavíme tie prípady, kedy nie je splnená nutná podmienka konvergencie radu. Zrejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} 0, & p > 0, \\ 1, & p = 0, \\ +\infty, & p < 0. \end{cases}$$

Odtiaľ plynie, že Riemannov rad diverguje pre $p \leq 0$. Pre $p > 0$ zatiaľ nevieme tvrdiť nič, pretože sme overili len nutnú podmienku konvergencie, a teda sa k tomuto prípadu vrátime čoskoro po vybudovaní potrebnej teórie. □

Ako sme uviedli v prípade Grandiho radu s nekonečnými súčtami sa nedá narábať ako s konečnými. Vyvstáva teda otázka, kedy s s nimi tak narábať môžeme, čiže kedy platí „distributívny zákon”, „asociatívny zákon” a „komutatívny zákon” pre nekonečne veľa sčítancov? Pre prvé dva zákony je odpoveď prekvapivo jednoduchá: pre konvergentné rady! Pre komutatívny zákon ani konvergencia nepostačuje (ale o tom až neskôr).

Veta. *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$. *Potom*

(i) rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *konverguje a platí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$;

(ii) rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ *konverguje pre každé* $k \in \mathbb{R}$ *a platí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot a$. *Naviac, ak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ *konverguje, kde* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *potom konverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôkaz. (i) Označme $(A_n)_1^\infty$, $(B_n)_1^\infty$ a $(C_n)_1^\infty$ p.č.s. radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$C_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n + B_n,$$

odkiaľ plynie, že $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} (A_n + B_n) = a + b$, t.j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(ii) Nech $(A_n)_1^\infty$ a $(K_n)_1^\infty$ sú p.č.s. radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$K_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = kA_n,$$

odkiaľ $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = ka$, t.j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n = ka$. Ak naopak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n$ a $k \neq 0$, podľa vyššie dokázaného konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}(ka_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Tvrdenie (i) môžeme jednoducho matematickou indukciou rozšíriť na ľubovoľný konečný počet sčítancov. Triviálne platí uvedená veta aj pre rozdiel. Pozor, z konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ale neplynie konvergencia radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, ako sa o tom môžeme presvedčiť na príklade radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Z príkladu Grandiho radu sa môžeme poučiť ešte o tom, že medzi členy nekonečného číselného radu nemôžeme ľubovoľne umiestniť zátvorky, t.j. *neplatí asociatívny zákon vo všeobecnosti*. Iba v prípade konvergentného radu môžeme združovať členy ľubovoľne bez toho, aby to ovplyvnilo súčet radu. Táto skutočnosť je sformulovaná v nasledujúcej vete, ktorú môžeme pokojne nazvať „asociatívnym zákonom" pre konvergentné rady.

Veta. *Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad a $(k_n)_1^\infty$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel. Položme*

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}, \\ b_2 &= a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}, \\ &\vdots \\ b_n &= a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n},\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dôkaz. Ak $(A_n)_1^\infty$ a $(B_n)_1^\infty$ sú p.č.s. radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$B_n = b_1 + \cdots + b_n = a_1 + \cdots + a_{k_n} = A_{k_n},$$

t.j. $(B_n)_1^\infty$ je vybraná postupnosť z konvergentnej postupnosti $(A_n)_1^\infty$, a teda aj $(B_n)_1^\infty$ konverguje. □

Poznamenajme, že obrátená veta neplatí, napr. pre Grandiho rad a postupnosť $k_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ je $b_n = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, teda rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentný. Analógiu komutatívneho zákona (o prerovnaní členov) uvedieme neskôr, ale prezradíme, že ani pre konvergentné rady nemusí platiť. K jeho platnosti budeme potrebovať silnejšiu vlastnosť, tzv. *absolútnu konvergenciu radu*.

Definícia. Hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konverguje*, akk konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Vzájomný vzťah medzi pojmami konvergencie a absolútnej konvergencie nekonečných číselných radov je poriadne sformulovaný a dokázaný nasledovne.

Veta. *Ak rad konverguje absolútne, tak konverguje.*

Dôkaz. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Keďže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolútne konvergentný, konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, t.j. podľa C-B kritéria

$$(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ ||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon.$$

Z trojuholníkovej nerovnosti potom máme

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| = ||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon,$$

teda podľa C-B kritéria konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

V ďalšom sa preto budeme zaoberať radmi s nezápornými členmi, teda vyšetrovať absolútnu konvergenciu. Ak totiž rad má aj záporné členy, absolútna hodnota ich zmení na kladné. Potom pre rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členmi, t.j. $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \geq 0$, platí, že postupnosť $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov je *neklesajúca*, pretože $(\forall n \in \mathbb{N})\ s_{n+1} = s_n + a_n \geq s_n$. Ak je naviac táto postupnosť zhora ohraničená, tak podľa Vety o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti existuje jej limita, teda rad s nezápornými členmi je konvergentný alebo divergentný do $+\infty$, nikdy ale nemôže oscilovať!

Tvrdenie. *Rad s nezápornými členmi je konvergentný práve vtedy, keď postupnosť jeho čiastočných súčtov je ohraničená.*

Príklad. Vráťme sa k otázke konvergencie Riemannovho radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$. Už vieme, že diverguje pre $p \leq 0$ a tiež pre $p = 1$, kedy ide o harmonický rad. Riemannov rad je zrejme rad s kladnými členmi, a tak o jeho konvergencii rozhoduje ohraničenosť postupnosti $(s_n)_1^{\infty}$ jeho čiastočných súčtov, ktorá je neklesajúca. Pozrime sa na ňu detailnejšie. Pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ urobíme zopár úprav (fínt!):

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= \sum_{n=1}^{2k+1} \frac{1}{n^p} = 1 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{(2i)^p} + \frac{1}{(2i+1)^p} \right) < 1 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{(2i)^p} + \frac{1}{(2i)^p} \right) = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{(2i)^p} = 1 + 2^{1-p} s_k \\ &< 1 + 2^{1-p} s_{2k+1} \quad \Leftrightarrow \quad s_{2k+1}(1 - 2^{1-p}) < 1. \end{aligned}$$

Ak chceme z tejto nerovnosti vyjadriť s_{2k+1}, musíme dať pozor na výraz $1 - 2^{1-p}$, ktorý môže nadobúdať kladné, záporné a aj nulovú hodnotu. Keďže chceme nájsť horné ohraničenie, musíme zabezpečiť, aby $1 - 2^{1-p} > 0$, čo platí len vtedy, keď $p > 1$. Potom dostávame $s_{2k+1} < \frac{1}{1-2^{1-p}}$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, teda $(s_k)_1^{\infty}$ je ohraničená, a preto Riemannov rad konverguje pre $p > 1$. Upozornime, že o prípade $p \in (0, 1)$ ešte stále nevieme nič povedať.

Nájsť súčet radu je vo všeobecnosti veľmi komplikovaná vec a už aj pri jednoduchých radoch to môže predstavovať problém pri vyjadrení postupnosti čiastočných súčtov. Preto sa častokrát uspokojíme len s vedomosťou, či daný rad konverguje alebo diverguje. Cauchyho-Bolzanovo kritérium, významné svojou univerzálnosťou, spôsobuje obvykle taktiež určité výpočtové ťažkosti pri praktickom použití na skúmanie konvergencie daného radu (lebo opäť narába s postupnosťou čiastočných súčtov). Preto v teórii nekonečných číselných radov existuje viacero kritérií konvergencie (divergencie). Na rozdiel od Cauchyho-Bolzanovho kritéria dávajú iba postačujúcu podmienku pre konvergenciu radu, avšak sú jednoduché a vždy je možné použiť to, ktoré je výhodné pri skúmaní konkrétneho radu. Uvedieme iba niekoľko z nich, ktoré nám poslúžia pri počítaní príkladov.

Jednou z najdôležitejších kritérií konvergencie sú kritériá známe pod spoločným názvom *porovnávacie kritériá.* Ich spoločným znakom je to, že skúmaný rad určitým spôsobom porovnáme s vhodným známym radom a na základe tohto porovnania vyslovíme záver o konvergencii alebo divergencii skúmaného radu.

Veta (porovnávacie kritérium)**.** *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú rady s nezápornými členmi a* $a_n \leq b_n$ *pre skoro všetky* $n \in \mathbb{N}$. *Potom*

(i) ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, konverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*;*

(ii) ak diverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, tak diverguje rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Dôkaz. Keďže vynechanie konečného počtu členov radu nerozhoduje o konvergencii, môžeme predpokladať, že $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq b_n$. Nech $(A_n)_1^{\infty}$ je p.č.s. radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $(B_n)_1^{\infty}$ je p.č.s. radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Zrejme potom platí $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \leq B_n$.

(i) Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom konverguje aj postupnosť $(B_n)_1^{\infty}$, a teda je zhora ohraničená, t.j. $(\exists H \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ B_n \leq H$. Potom $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \leq H$, teda $(A_n)_1^{\infty}$ je zhora ohraničená. Keďže je neklesajúca, tak podľa Vety o konvergencii monotónnej ohraničenej postupnosti je konvergentná, čo znamená, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný.

(ii) Ak diverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, potom diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pretože ak by konvergoval, potom by podľa predchádzajúcej časti konvergoval aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, čo je spor. □

Poznámka. Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ z predchádzajúcej vety sa zvykne nazývať *majorantný rad* k radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *minorantný rad* k radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Veta teda hovorí, že rad s nezápornými členmi konverguje, ak k nemu dokážeme nájsť majorantný konvergentný rad a diverguje, ak k nemu nájdeme minorantný divergentný rad.

Príklad. Doriešme otázku konvergencie Riemannovho radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pre posledný zostávajúci prípad $p \in (0,1)$. Potom zrejme pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n^p < n$, t.j. $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$. Keďže rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, na základe porovnávacieho kritéria diverguje aj Riemannov rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ pre $p \in (0,1)$. Zhrnutím dostávame, že *Riemannov rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *konverguje práve vtedy, keď* $p > 1$.

Keďže študenti neradi robia odhady (fuj!), uvedieme kritériá, ktoré sú častokrát jednoduchšie na použitie, ale sú fakticky (šikovným) dôsledkom porovnávacieho kritéria.

Veta (limitné porovnávacie kritérium)**.** *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú rady s nezápornými členmi a existuje vlastná alebo nevlastná limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Potom

(i) ak $L < +\infty$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentný rad, tak konverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*;*

(ii) ak $L > 0$ a diverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôkaz. (i) Nech $L < +\infty$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Potom z definície limity

$$(\forall \varepsilon > 0, \varepsilon < L)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon, \tag{1}$$

odkiaľ $a_n < (L + \varepsilon)b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Keďže podľa operácií s radmi rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (L + \varepsilon)b_n$ konverguje, podľa porovnávacieho kritéria konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Ak $0 < L < +\infty$, potom z definície limity (1) pre $\varepsilon < L$ platí $(L - \varepsilon)b_n < a_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$. Z divergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (L - \varepsilon)b_n$ potom podľa porovnávacieho kritéria vyplýva divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak $L = +\infty$, podľa definície nevlastnej limity $(\forall K > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ \frac{a_n}{b_n} > K$, t.j. zo vzťahu $a_n > K b_n$ pre skoro všetky $n \in \mathbb{N}$ vyplýva divergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$