Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 13

25. marca 2024

Elementárne topologické pojmy na reálnej osi

Čo je topológia: Topológia je disciplína zaoberajúca sa vlastnosťami objektov, ktoré sa nemenia pri spojitých zobrazeniach.

- okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}(x_0)$

– je ľubovoľný otvorený interval obsahujúci bod x_0

- δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$, kde $\delta > 0$

- prstencové okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^*(x_0)$

– $\mathscr{O}^*(x_0) := \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$

- prstencové δ-okolie bodu x_0 ... $\mathscr{O}^*_\delta(x_0)$

– $\mathscr{O}^*_\delta(x_0) := \mathscr{O}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}$, kde $\delta > 0$

- okolie bodu $+\infty$ ... $\mathscr{O}(+\infty)$

– je ľubovoľný otvorený interval $(a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$

- okolie bodu $-\infty$ ... $\mathscr{O}(-\infty)$

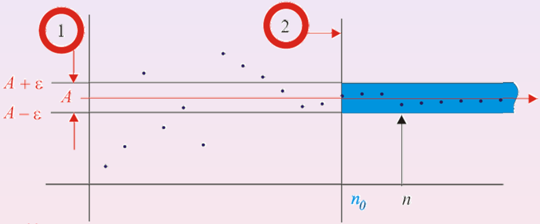
– je ľubovoľný otvorený interval $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$

Poznámka: každé okolie bodov $+\infty$ a $-\infty$ je vlastne prstencové!

Zopakovanie

Číslo $A \in \mathbb{R}$ nazývame limitou postupnosti $(a_n)_1^\infty$, akk pre každé $\varepsilon > 0$ nerovnosť $|a_n - A| < \varepsilon$ platí pre skoro všetky prirodzené čísla n, t.j.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\ a_n \in \mathscr{O}_\varepsilon(A).$$



Prečo $n \to \infty$? Čím je bod $+\infty$ význačný v súvislosti s definičným oborom postupnosti $(a_n)_1^\infty$, t.j. množinou $\mathbb{N}$?

$$\text{Bod } +\infty \text{ má vlastnosť } \quad (\forall \mathscr{O}(+\infty))\ \mathbb{N} \cap \mathscr{O}(+\infty) \neq \emptyset$$

Definícia – hromadný bod množiny

Bod $b \in \mathbb{R}^*$ nazývame hromadný bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, akk v ľubovoľnom prstencovom okolí bodu b existuje bod $x \in M$.

Poznámky a príklady:

- kvantifikovaný výrok: bod $b \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $(\forall \mathscr{O}^*(b))\ M \cap \mathscr{O}^*(b) \neq \emptyset$;
- špeciálne pre vlastné čísla: bod $b \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $M \subset \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $(\forall \delta > 0)(\exists x \in M)\ 0 < |x - b| < \delta$;
- hromadný bod množiny nemusí do množiny patriť!
- bod $+\infty$ je jediný hromadný bod množiny $\mathbb{N}$;
- hromadnými bodmi množiny $M = (0, 1)$ sú body $0, 1$ a všetky body množiny M;
- množina $M = \{0, 1\}$ nemá hromadné body;
- izolovaný bod množiny je bod, ktorý nie je jej hromadný bod;

Pozorovanie: hromadný bod množiny = dá sa k nemu "ľubovoľne priblížiť"

Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

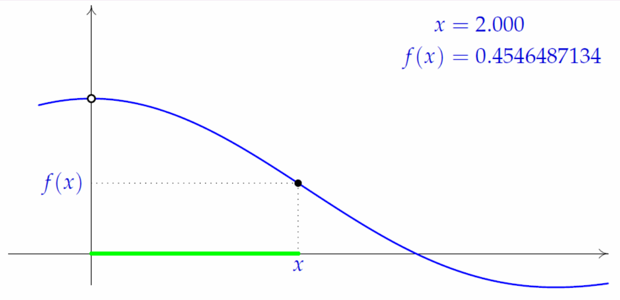
The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

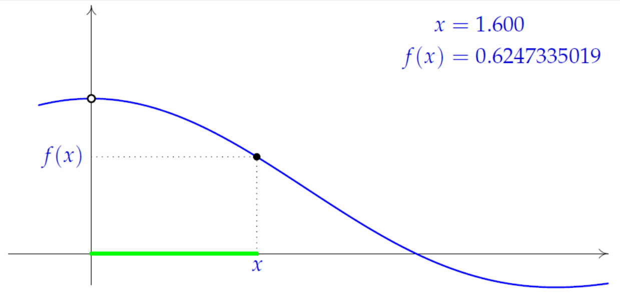
> The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
>
> Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

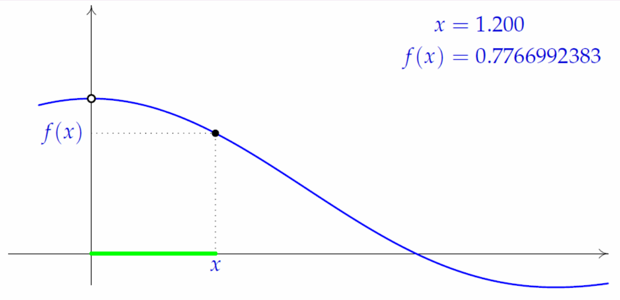
> The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
>
> Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.

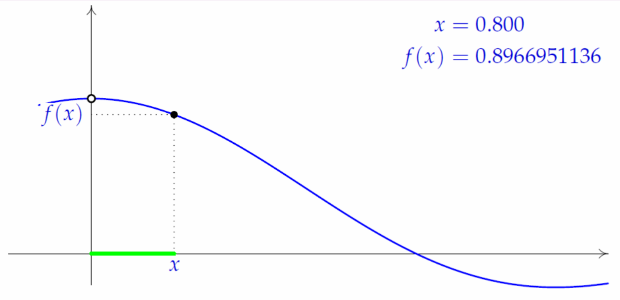
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

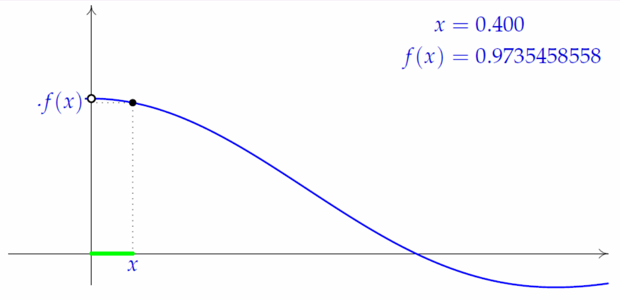
> The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
>
> Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

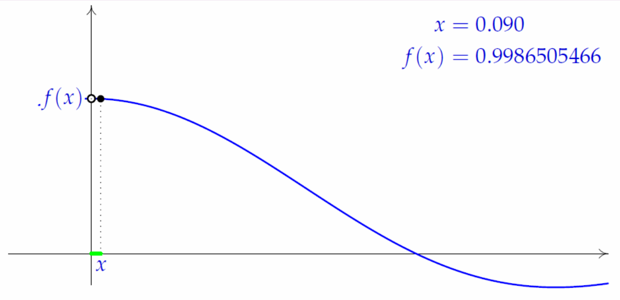
> The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
>
> Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že **číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0**, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.

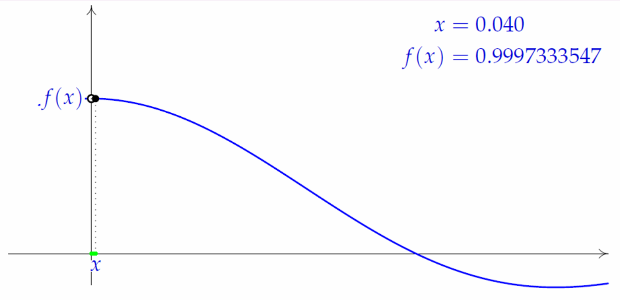
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

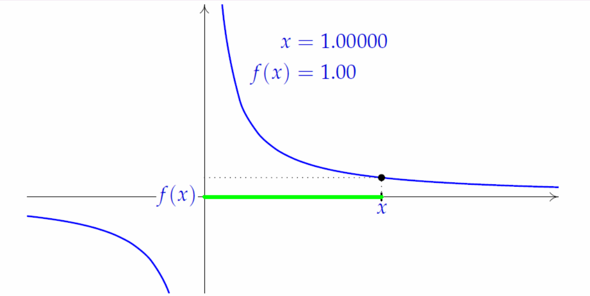
> The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
>
> Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **nevlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

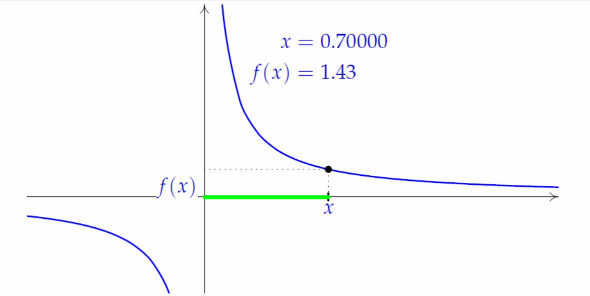
The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **nevlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

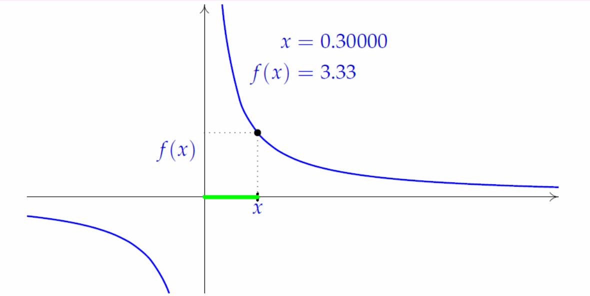
> The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
>
> Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **nevlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

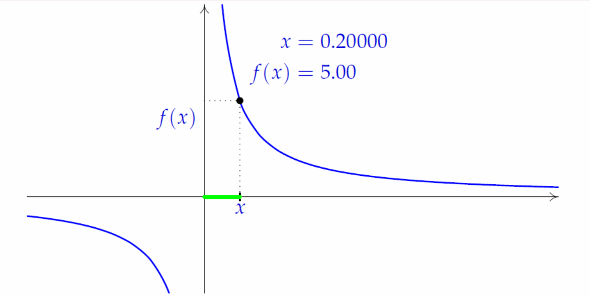
> The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
>
> Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že **číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0**, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **nevlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

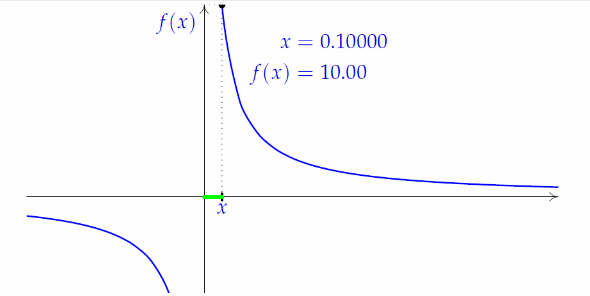
> The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
>
> Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že **číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0**, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **nevlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.

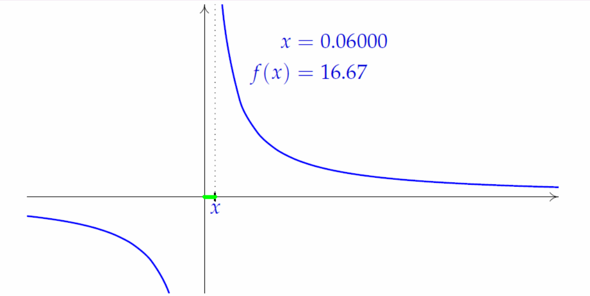
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **nevlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.

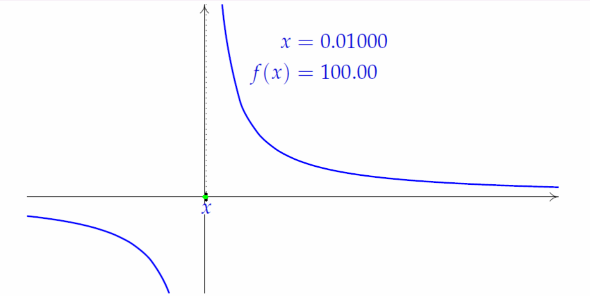
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **nevlastná hodnota vo vlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.

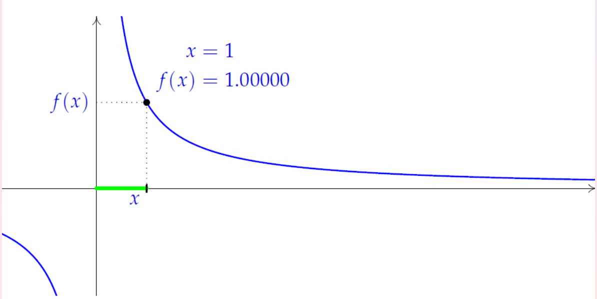
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota v nevlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.

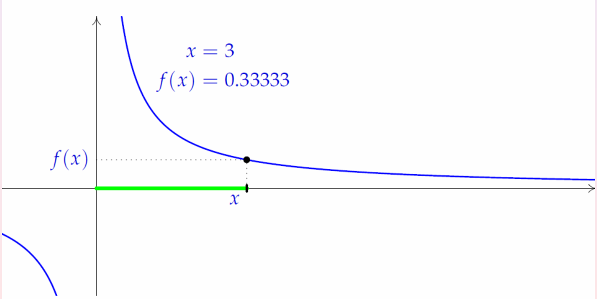
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa":

✓ **vlastná hodnota v nevlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

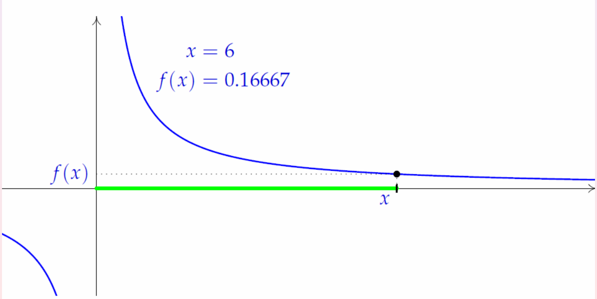
> The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
>
> Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota v nevlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

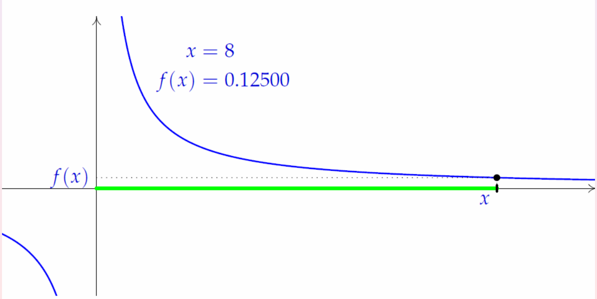
The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota v nevlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.

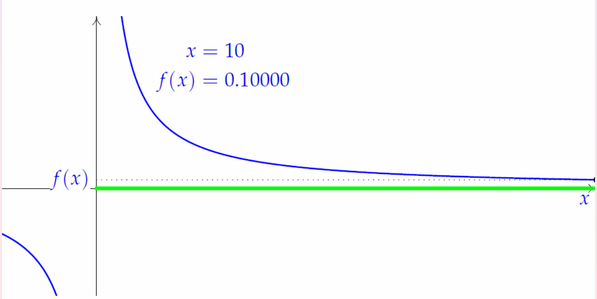
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota v nevlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.

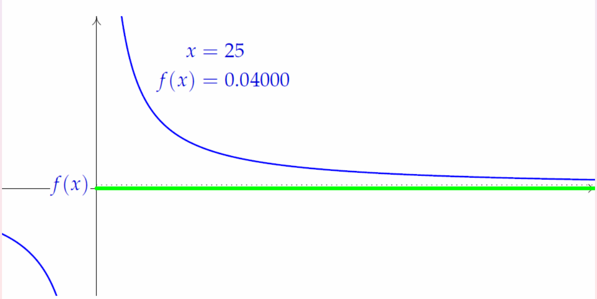
Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota v nevlastnom bode**



Limita funkcie: ...nech sú veci bližšie a bližšie...

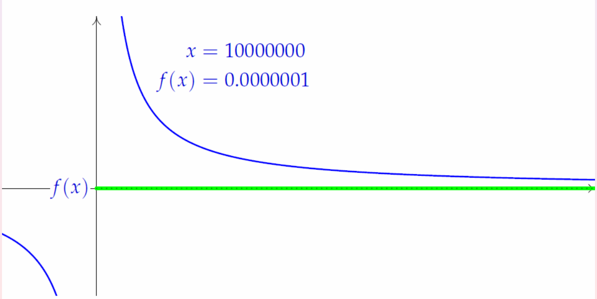
> The concept of the limit of a function was probably first defined with sufficient rigour by Weierstrass.
>
> Pringsheim: *Enzyclopädie der Math. Wiss.* (1899)

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Poznámka: Táto topologická (super)definícia presne vystihuje to, čo intuitívne nazývame „blížiť sa“:

✓ **vlastná hodnota v nevlastnom bode**



Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk

$$(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a).$$

– v závislosti od hodnôt x_0 a a máme 9 možností (v dvoch skupinách):

(I) vlastná limita funkcie – vo vlastnom bode

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathscr{O}_\delta^*(x_0) \cap D_f)\; f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(a)$$

(I) vlastná limita funkcie – v nevlastnom bode $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (\delta, +\infty) \cap D_f)\; f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(a)$$

(I) vlastná limita funkcie – v nevlastnom bode $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (-\infty, -\delta) \cap D_f)\; f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(b)$$

(II) nevlastná limita funkcie – zvyšných 6 prípadov

$$\lim_{x \to \dots} f(x) = \pm\infty \;\Leftrightarrow\; \text{... o trošku neskôr ...}$$

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk

$$(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a).$$

– v závislosti od hodnôt x_0 a a máme 9 možností (v dvoch skupinách):

(I) vlastná limita funkcie – vo vlastnom bode

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathscr{O}^*_\delta(x_0) \cap D_f)\; f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(a)$$

Úloha: Dokážte z definície, že pre $a > 0$ je $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

pohrajte sa interaktívne: `https://www.geogebra.org/m/tCnmrWg2`

(I) vlastná limita funkcie – v nevlastnom bode $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (\delta, +\infty) \cap D_f)\; f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(a)$$

Úloha: Dokážte z definície, že $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$.

Niekoľko všeobecných tvrdení o (všetkých) limitách funkcie

When the successively attributed values of the same variable indefinitely approach a fixed value, so that finally they differ from it by as little as desired, the last is called the *limit* of all the others.

Cauchy: *Cours d'Analyse* (1821)

Veta V.1

Funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nanajvýš jednu limitu.

Tvrdenie V.2

Nech x_0 je hromadný bod množiny $M = D_f \cap D_g$ a nech $(\exists \mathscr{O}(x_0))$ $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap M)\, f(x) = g(x)$. Potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existuje práve vtedy, keď existuje $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Príklad: Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1}{x - 1}$.

Veta V.3

Nech x_0 je hromadný bod množiny $M = D_f \cap D_g$ a nech $(\exists \mathscr{O}(x_0))$ $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap M)\, f(x) \leq g(x)$. Potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.