Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 14

28. marca 2024

Zopakovanie

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Pripomenutie: Bod $b \in \mathbb{R}^*$ nazývame hromadný bod množiny $M \subseteq \mathbb{R}$, akk $(\forall \mathscr{O}^*(b))\ M \cap \mathscr{O}^*(b) \neq \emptyset$.

– v závislosti od hodnôt x_0 a a máme 9 možností (v dvoch skupinách):

(I) vlastná limita funkcie vo vlastnom bode $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - a| < \varepsilon\big)$$

(I) vlastná limita funkcie v nevlastnom bode $x_0 = +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(x > \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - a| < \varepsilon\big)$$

(I) vlastná limita funkcie v nevlastnom bode $x_0 = -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(x < -\delta \ \Rightarrow\ |f(x) - a| < \varepsilon\big)$$

(II) nevlastná limita funkcie – zvyšných 6 prípadov

$$\lim_{x\to \dots} f(x) = \pm\infty \iff \text{... o trošku neskôr ...}$$

Niekoľko všeobecných tvrdení o (všetkých) limitách funkcie

When the successively attributed values of the same variable indefinitely approach a fixed value, so that finally they differ from it by as little as desired, the last is called the *limit* of all the others.

Cauchy: *Cours d'Analyse* (1821)

Veta V.1

Funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nanajvýš jednu limitu.

Tvrdenie V.2

Nech x_0 je hromadný bod množiny $M = D_f \cap D_g$ a nech $(\exists \mathscr{O}(x_0))$ $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap M)\, f(x) = g(x)$. Potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existuje práve vtedy, keď existuje $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Príklad: Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1}{x - 1}$.

Tvrdenie V.3

Nech x_0 je hromadný bod množiny $M = D_f \cap D_g$ a nech $(\exists \mathscr{O}(x_0))$ $(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap M)\, f(x) \leq g(x)$. Potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

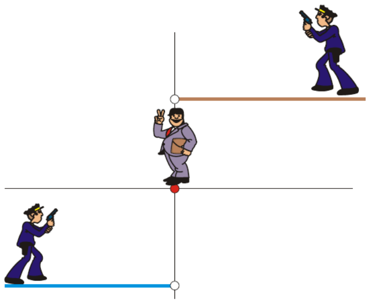
Pripomenutie: Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0 (alebo tiež existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a je rovná číslu $a \in \mathbb{R}^*$), akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

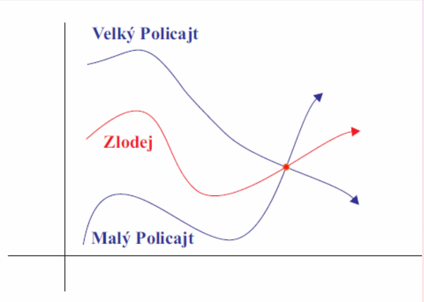
Veta (o zovretí)

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $D_f \cap D_g \cap D_h$ a

$$(\exists \mathscr{O}_1(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}_1^*(x_0) \cap D_f \cap D_g \cap D_h)\; f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Ak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}^*$, tak existuje $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$.





Niekoľko všeobecných tvrdení o (všetkých) limitách funkcie

Veta (o limite zloženej funkcie)

Nech $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $D_{f\circ g}$. Ak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}^*$, pričom $(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_g)\ g(x) \neq a$ a $\lim\limits_{y\to a} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, tak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} (f\circ g)(x)$ a platí

$$\lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = \lim_{y\to a} f(y) = b.$$

Poznámky:

- predpoklad $g(x) \neq a$ pre $a = \pm\infty$ je vždy triviálne splnený;
- v prípade $a \in \mathbb{R}$ je predpoklad $g(x) \neq a$ na nejakom $\mathscr{O}^*(x_0)$ veľmi dôležitý, napr. pre $g(x) \equiv 1$ a $f(y) = 3$ pre $y \neq 1$ a $f(1) = 2$ platí
$$\lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = 2 \neq 3 = \lim_{y\to 1} f(y);$$
- veta o limite zloženej funkcie dáva iba postačujúcu podmienku k existencii limity zloženej funkcie, pretože napr. $\lim\limits_{x\to x_0} \chi(x)$ neexistuje pre žiadne $x_0 \in \mathbb{R}$, ale $\lim\limits_{x\to x_0} (\chi\circ\chi)(x) = 1$ pre každé $x_0 \in \mathbb{R}$ (overte!);

Niekoľko všeobecných tvrdení o (všetkých) limitách funkcie

Veta (o limite zloženej funkcie)

Nech $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $D_{f\circ g}$. Ak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}^*$, pričom $(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_g)\ g(x) \neq a$ a $\lim\limits_{y\to a} f(y) = b \in \mathbb{R}^*$, tak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} (f\circ g)(x)$ a platí

$$\lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = \lim_{y\to a} f(y) = b.$$

Poznámky a príklady:

- veta o limite zloženej funkcie sčasti legalizuje výpočty, ktoré sme robili doteraz pri výpočte limít postupností, napr.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{n}{1+n} - \sin\frac{1}{2n}} \overset{!!!}{=} \sqrt[4]{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n} - \sin\frac{1}{2n}\right)} \overset{?}{=} \sqrt[4]{1-\sin 0} = 1$$

  (veď aj postupnosť je len funkcia!);

- Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-7x+6}{x-1}\right)^{23}$.

Niekoľko všeobecných tvrdení o (všetkých) limitách funkcie

Ako súvisí limita funkcie a limita postupnosti?

Veta (Heineho, 1870)

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Potom

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_1^\infty \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}}, x_n \in D_f \setminus \{x_0\}\right) \; x_n \to x_0 \; \Rightarrow \; f(x_n) \to a.$$

Heinrich Eduard HEINE (1821–1881)

Niekoľko všeobecných tvrdení o (všetkých) limitách funkcie

Ako súvisí limita funkcie a limita postupnosti?

Veta (Heineho, 1870)

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Potom

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_1^\infty \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}}, x_n \in D_f \setminus \{x_0\}\right) x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a.$$

Poznámky:

- Heineho veta netvrdí, že $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(n)$, kde $n \in \mathbb{N}$!
- v postačujúcej podmienke sme ukázali, že ak pre každú postupnosť $(x_n)_1^\infty \subseteq D_f \setminus \{x_0\}$ takú, že $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ platí, že $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ je rovná tomu istému číslu a, potom $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existuje a je rovná tiež a;
- dokážte, že k existencii limity funkcie f v bode x_0 stačí predpokladať existenciu limít všetkých postupností $(f(x_n))_1^\infty$, t.j.

nezávislosť limity funkčných hodnôt na voľbe testovacej postupnosti

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Ak pre každú postupnosť $(x_n)_1^\infty$ takú, že $x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$ a $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ existuje limita postupnosti $(f(x_n))_1^\infty$, potom je táto limita nezávislá od voľby postupnosti $(x_n)_1^\infty$.

Niekoľko všeobecných tvrdení o (všetkých) limitách funkcie

Ako súvisí limita funkcie a limita postupnosti?

Veta (Heineho, 1870)

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Potom

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_1^\infty \in \mathbb{N}^\mathbb{R}, x_n \in D_f \setminus \{x_0\}\right) x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a.$$

Poznámky:

- v prípade dôsledného axiomatického budovania základov matematickej analýzy je potrebné na zdôvodnenie existencie postupnosti $(x_n)_1^\infty$, ktorú sme použili v dôkaze postačujúcosti existencie limity funkcie, použiť axiómu nazývanú axióma výberu

Axióma výberu (jedna z možných formulácií)

Nech $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ je systém neprázdnych množín, kde I je neprázdna množina indexov. Potom existuje zobrazenie $Z : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ také, že pre každé $\alpha \in I$ je $Z(\alpha) \in A_\alpha$.

- treba upozorniť, že v matematike existujú aj smery nepovažujúce dôkazy založené na axióme výberu za korektné, preto ju používame aj my len v nevyhnutných prípadoch!