Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

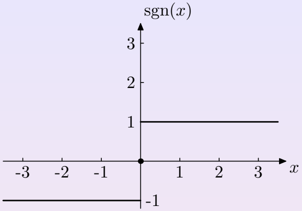
[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

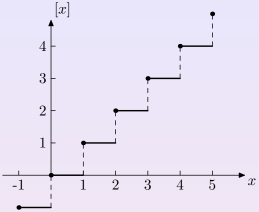
umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 15

4. apríla 2024

Jednostranné limity funkcie





Pozorovanie: pre definícii limity funkcie v nevlastnom bode $x_0 = +\infty$ alebo $x_0 = -\infty$ nemáme pochybnosť o tom, „z ktorej strany" sa k tomuto hromadnému bodu blížime. Pri $x_0 \in \mathbb{R}$ sa to ale môže udiať z dvoch strán!

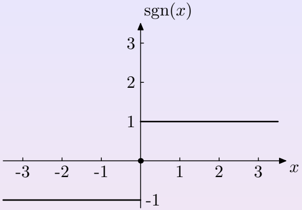
Označenie: pravým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumieme množinu $\mathscr{O}^+(x_0) := \mathscr{O}^*(x_0) \cap (x_0, +\infty)$
ľavým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumieme množinu $\mathscr{O}^-(x_0) := \mathscr{O}^*(x_0) \cap (-\infty, x_0)$

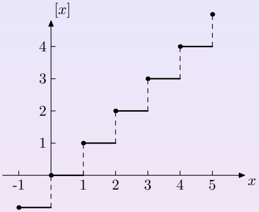
Definícia – jednostranná limita funkcie sprava

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D_f \cap (x_0, +\infty)$. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou sprava funkcie f v bode x_0, zapisujeme $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$, akk

$$(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in D_f \cap \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) \in \mathscr{O}(a).$$

Jednostranné limity funkcie





Pozorovanie: pre definícii limity funkcie v nevlastnom bode $x_0 = +\infty$ alebo $x_0 = -\infty$ nemáme pochybnosť o tom, „z ktorej strany" sa k tomuto hromadnému bodu blížime. Pri $x_0 \in \mathbb{R}$ sa to ale môže udiať z dvoch strán!

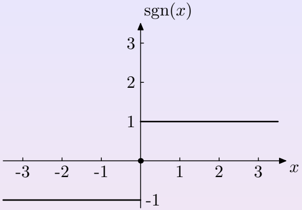
Označenie: pravým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumieme množinu $\mathscr{O}^+(x_0) := \mathscr{O}^*(x_0) \cap (x_0, +\infty)$
ľavým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumieme množinu $\mathscr{O}^-(x_0) := \mathscr{O}^*(x_0) \cap (-\infty, x_0)$

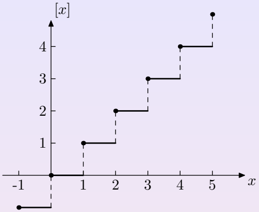
Definícia – jednostranná limita funkcie sprava

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D_f \cap (x_0, +\infty)$. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou sprava funkcie f v bode x_0, zapisujeme $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$, akk

$$(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in D_f \cap \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) \in \mathscr{O}(a).$$

Jednostranné limity funkcie





Pozorovanie: pre definícii limity funkcie v nevlastnom bode $x_0 = +\infty$ alebo $x_0 = -\infty$ nemáme pochybnosť o tom, „z ktorej strany“ sa k tomuto hromadnému bodu blížime. Pri $x_0 \in \mathbb{R}$ sa to ale môže udiať z dvoch strán!

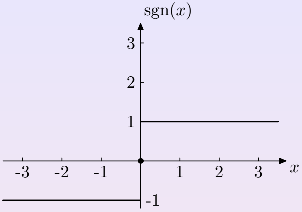
Označenie: pravým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumieme množinu $\mathscr{O}^+(x_0) := \mathscr{O}^*(x_0) \cap (x_0, +\infty)$
ľavým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumieme množinu $\mathscr{O}^-(x_0) := \mathscr{O}^*(x_0) \cap (-\infty, x_0)$

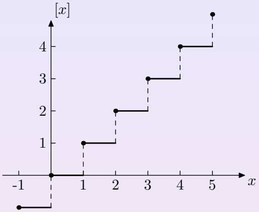
Definícia – jednostranná limita funkcie sprava

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D_f \cap (x_0, +\infty)$. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou sprava funkcie f v bode x_0, zapisujeme $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$, akk

$$(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in D_f \cap \mathscr{O}^+(x_0))\, f(x) \in \mathscr{O}(a).$$

Jednostranné limity funkcie





Pozorovanie: pre definícii limity funkcie v nevlastnom bode $x_0 = +\infty$ alebo $x_0 = -\infty$ nemáme pochybnosť o tom, „z ktorej strany“ sa k tomuto hromadnému bodu blížime. Pri $x_0 \in \mathbb{R}$ sa to ale môže udiať z dvoch strán!

Označenie: pravým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumieme množinu $\mathscr{O}^+(x_0) := \mathscr{O}^*(x_0) \cap (x_0, +\infty)$
ľavým okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumieme množinu $\mathscr{O}^-(x_0) := \mathscr{O}^*(x_0) \cap (-\infty, x_0)$

Definícia – jednostranná limita funkcie zľava

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D_f \cap (-\infty, x_0)$. Hovoríme, že číslo $b \in \mathbb{R}^*$ je limitou zľava funkcie f v bode x_0, zapisujeme $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = b$, akk

$$(\forall \mathscr{O}(b))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in D_f \cap \mathscr{O}^-(x_0))\, f(x) \in \mathscr{O}(b).$$

Jednostranné limity funkcie

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in D_f \cap \mathscr{O}^*(x_0))\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$

Dôležité pozorovanie: ak f je definovaná iba na nejakom pravom [ľavom] okolí hromadného bodu x_0, tak limita funkcie f v bode x_0 je ekvivalentná limite f sprava [zľava] v x_0!

Ako ale vo všeobecnosti spolu tieto tri limity súvisia?

Veta V.4

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množín $D_f \cap (x_0, +\infty)$ a $D_f \cap (-\infty, x_0)$. Potom $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a$.

Príklad: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{|(x-1)(x+3)|}$.

Tvrdenie V.5

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = a$

(ii) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = b$

Jednostranné limity funkcie

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in D_f \cap \mathscr{O}^*(x_0))\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$

Dôležité pozorovanie: ak f je definovaná iba na nejakom pravom [ľavom] okolí hromadného bodu x_0, tak limita funkcie f v bode x_0 je ekvivalentná limite f sprava [zľava] v x_0!

Ako ale vo všeobecnosti spolu tieto tri limity súvisia?

Veta V.4

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množín $D_f \cap (x_0, +\infty)$ a $D_f \cap (-\infty, x_0)$. Potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$.

Príklad: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{|(x-1)(x+3)|}$.

Tvrdenie V.5

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = a$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = b$

Jednostranné limity funkcie

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in D_f \cap \mathscr{O}^*(x_0))\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$

Dôležité pozorovanie: ak f je definovaná iba na nejakom pravom [ľavom] okolí hromadného bodu x_0, tak limita funkcie f v bode x_0 je ekvivalentná limite f sprava [zľava] v x_0!

Ako ale vo všeobecnosti spolu tieto tri limity súvisia?

Veta V.4

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množín $D_f \cap (x_0, +\infty)$ a $D_f \cap (-\infty, x_0)$. Potom

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^* \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = a.$$

Príklad: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{|(x-1)(x+3)|}$.

Tvrdenie V.5

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = a$

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = b$

Jednostranné limity funkcie

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in D_f \cap \mathscr{O}^*(x_0))\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$

Dôležité pozorovanie: ak f je definovaná iba na nejakom pravom [ľavom] okolí hromadného bodu x_0, tak limita funkcie f v bode x_0 je ekvivalentná limite f sprava [zľava] v x_0!

Ako ale vo všeobecnosti spolu tieto tri limity súvisia?

Veta V.4

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množín $D_f \cap (x_0, +\infty)$ a $D_f \cap (-\infty, x_0)$. Potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$.

Príklad: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{|(x-1)(x+3)|}$.

Tvrdenie V.5

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = a$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = b$

Jednostranné limity funkcie

$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow (\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in D_f \cap \mathscr{O}^*(x_0))\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$

Dôležité pozorovanie: ak f je definovaná iba na nejakom pravom [ľavom] okolí hromadného bodu x_0, tak limita funkcie f v bode x_0 je ekvivalentná limite f sprava [zľava] v x_0!

Ako ale vo všeobecnosti spolu tieto tri limity súvisia?

Veta V.4

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množín $D_f \cap (x_0, +\infty)$ a $D_f \cap (-\infty, x_0)$. Potom $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = a$.

Príklad: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{|(x-1)(x+3)|}$.

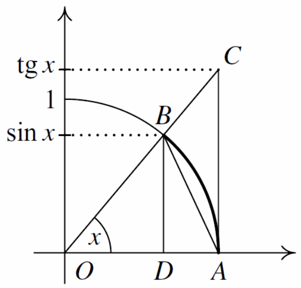
Tvrdenie V.5

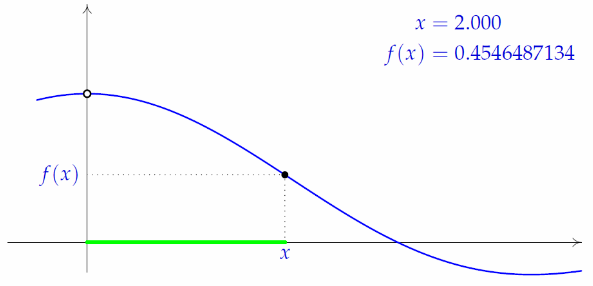
(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = a$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = b$

Jedna z dôležitých limít

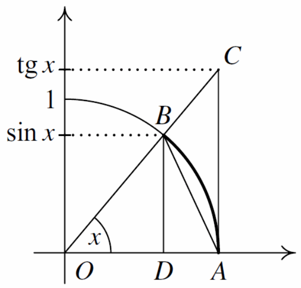
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

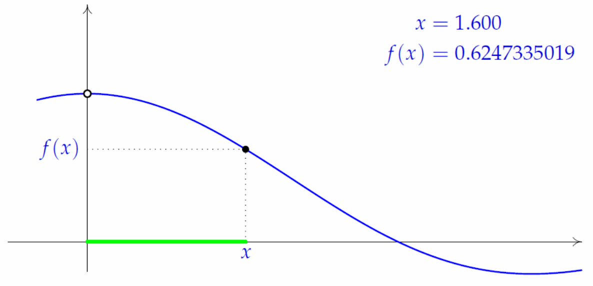




Jedna z dôležitých limít

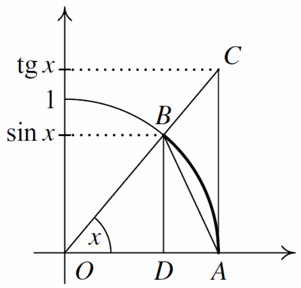
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

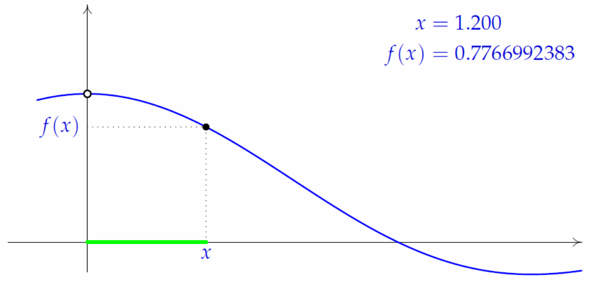




Jedna z dôležitých limít

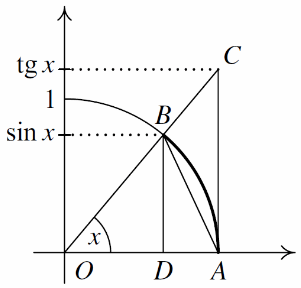
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

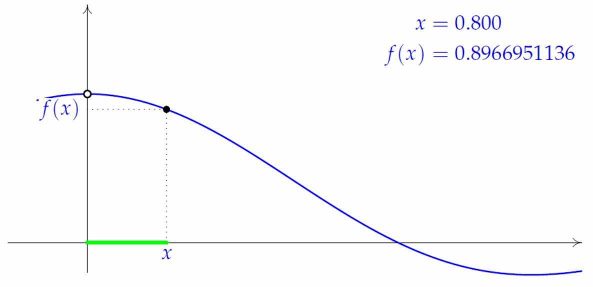




Jedna z dôležitých limít

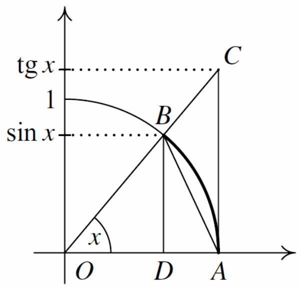
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

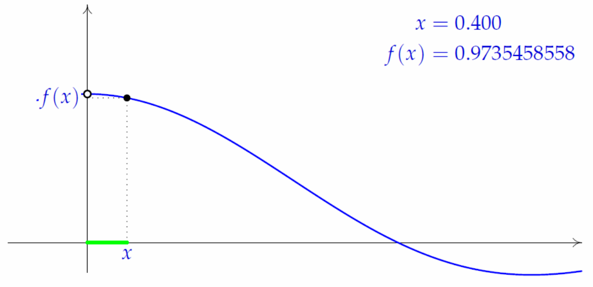




Jedna z dôležitých limít

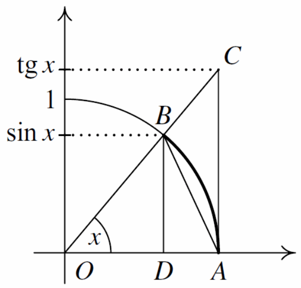
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

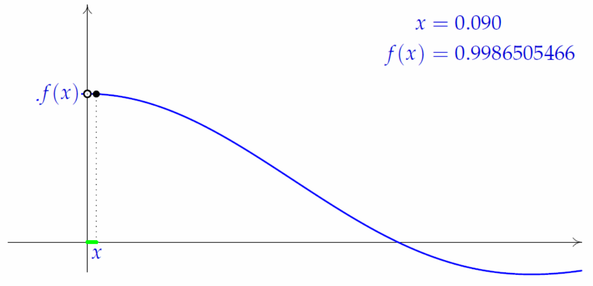




Jedna z dôležitých limít

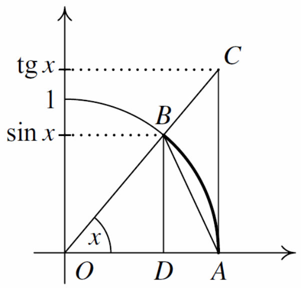
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

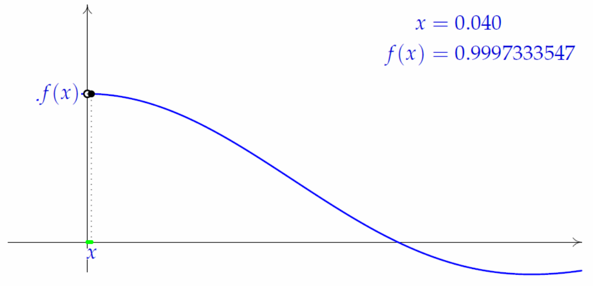




Jedna z dôležitých limít

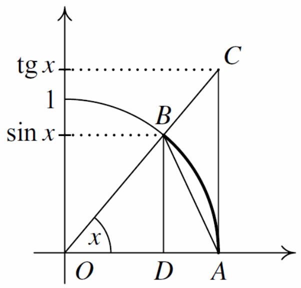
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

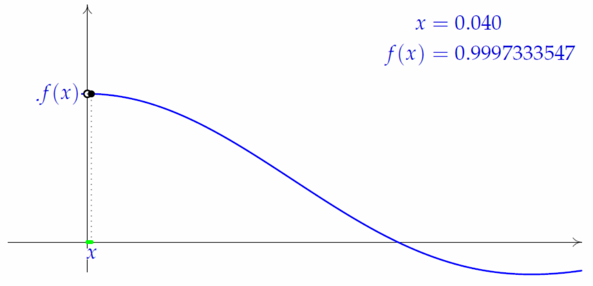




Jedna z dôležitých limít

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



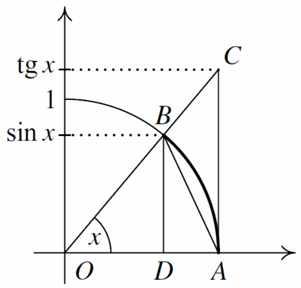


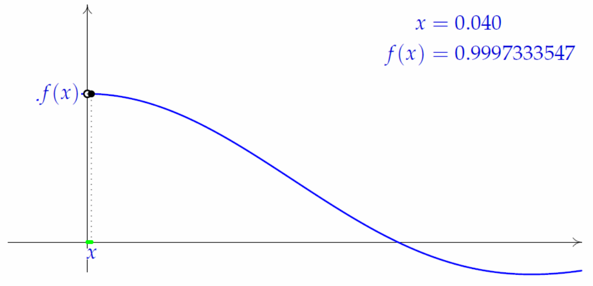
- obsah trojuholníka OAC je $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$;
- plocha kruhového výseku OAB je $\frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2}$;
- obsah trojuholníka OAB je $\frac{\sin x}{2}$;

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Jedna z dôležitých limít

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



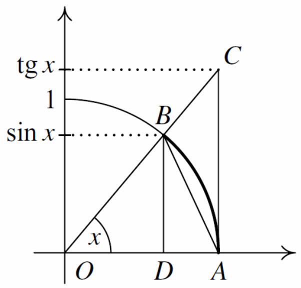


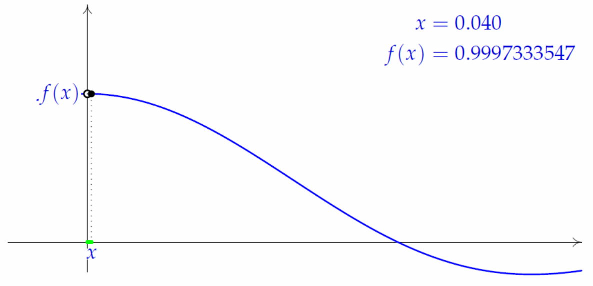
- obsah trojuholníka OAC je $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$;
- plocha kruhového výseku OAB je $\frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{x}{2}$;
- obsah trojuholníka OAB je $\frac{\sin x}{2}$;

$$\left(\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)\ \frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg} x}{2}\ \Leftrightarrow\ \sin x<x<\operatorname{tg} x$$

Jedna z dôležitých limít

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



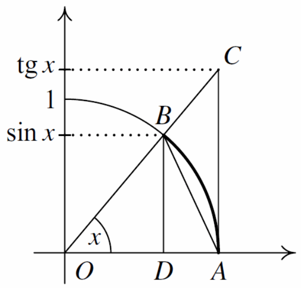


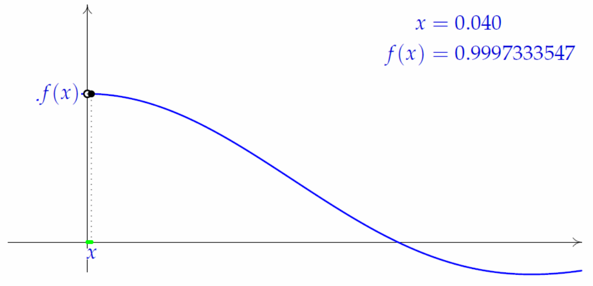
- obsah trojuholníka OAC je $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$;
- plocha kruhového výseku OAB je $\frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2}$;
- obsah trojuholníka OAB je $\frac{\sin x}{2}$;

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \; \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \;\Leftrightarrow\; \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Jedna z dôležitých limít

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$





- obsah trojuholníka OAC je $\frac{\operatorname{tg} x}{2}$;
- plocha kruhového výseku OAB je $\frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2}$;
- obsah trojuholníka OAB je $\frac{\sin x}{2}$;

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \ \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \ \Leftrightarrow \ \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

(I) Vlastná limita funkcie

Existuje niečo ako C-B kritérium pre limitu funkcie?

Veta (Dirichletova, 1872)

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Potom

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x', x'' \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859)

Náčrt dôkazu: $\Rightarrow$ ako pri Cauchyho-Bolzanovom kritériu konvergencie postupnosti (trojuholníková nerovnosť)...

$\Leftarrow$ použijeme Heineho vetu: pre ľubovoľnú postupnosť $(z_n)_1^\infty \subset D_f \setminus \{x_0\}$ konvergujúcu k x_0 je podľa predpokladu postupnosť $(f(z_n))_1^\infty$ fundamentálna, a teda konvergentná.

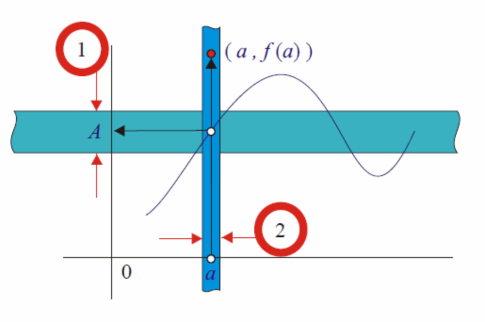
(I) Vlastná limita funkcie

Každá konvergentná postupnosť je ohraničená. Aká je verzia pre funkcie?

Veta (o lokálnej ohraničenosti funkcie majúcej vlastnú limitu)

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Ak f má vlastnú limitu v bode x_0, potom existuje prstencové okolie bodu x_0, na ktorom je f ohraničená, t.j.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; (\exists K > 0)(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\; |f(x)| \leq K\,.$$



(I) Vlastná limita funkcie

Veta (základné aritmetické operácie s vlastnou limitou funkcie)

Nech sú dané funkcie f a g a $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $D_f \cap D_g$. Ak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$, tak

(i) existuje $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)|$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$;

(ii) existuje $\lim\limits_{x \to x_0} (f \pm g)(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = a \pm b$;

(iii) existuje $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = a \cdot b$;

(iv) ak $b \neq 0$, tak existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}$.

Dôsledok

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Ak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, tak

(i) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ existuje $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha \cdot f)(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot a$;

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})$ existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f^n(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to x_0} f^n(x) = a^n$.

(I) Vlastná limita funkcie

Veta (základné aritmetické operácie s vlastnou limitou funkcie)

Nech sú dané funkcie f a g a $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $D_f \cap D_g$. Ak $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$, tak

(i) existuje $\lim_{x\to x_0} |f(x)|$ a platí $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$;

(ii) existuje $\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x)$ a platí $\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = a \pm b$;

(iii) existuje $\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x)$ a platí $\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = a \cdot b$;

(iv) ak $b \neq 0$, tak existuje $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x)$ a platí $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}$.

Dôsledok

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Ak $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, tak

(i) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ existuje $\lim_{x\to x_0} (\alpha \cdot f)(x)$ a platí $\lim_{x\to x_0} (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot a$;

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})$ existuje $\lim_{x\to x_0} f^n(x)$ a platí $\lim_{x\to x_0} f^n(x) = a^n$.

(I) Vlastná limita funkcie

Veta (základné aritmetické operácie s vlastnou limitou funkcie)

Nech sú dané funkcie f a g a $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $D_f \cap D_g$. Ak $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$, tak

(i) existuje $\lim_{x \to x_0} |f(x)|$ a platí $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$;

(ii) existuje $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x)$ a platí $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = a \pm b$;

(iii) existuje $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x)$ a platí $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = a \cdot b$;

(iv) ak $b \neq 0$, tak existuje $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x)$ a platí $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}$.

Príklady:

- Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} \right)$.
- Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{x(\sqrt{1 + x} - 1)}$.

(I) Vlastná limita funkcie

Veta (základné aritmetické operácie s vlastnou limitou funkcie)

Nech sú dané funkcie f a g a $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $D_f \cap D_g$. Ak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$, tak

(i) existuje $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |a|$;

(ii) existuje $\lim\limits_{x\to x_0} (f \pm g)(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = a \pm b$;

(iii) existuje $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = a \cdot b$;

(iv) ak $b \neq 0$, tak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}$.

Príklady:

- Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}\right)$.
- Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{x(\sqrt{1+x}-1)}$.