Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

`umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html`

Prednáška 16

8. apríla 2024

(I) Vlastná limita v nevlastnom bode

Topologická (super)definícia limity funkcie

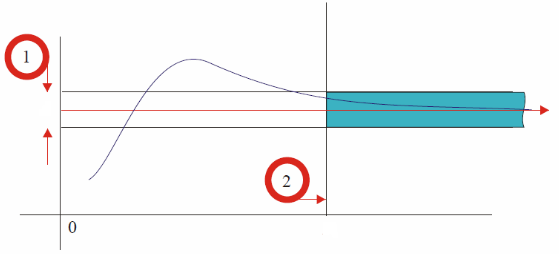
Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

(I) vlastná limita funkcie – v nevlastnom bode $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(x > \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\big)$$

(I) vlastná limita funkcie – v nevlastnom bode $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(x < -\delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\big)$$



Ďalšia dôležitá limita funkcie... a opäť Euler?

Moreover, for the sake of brevity, let us put for this number 2,71... etc. consistently the letter e, which therefore shall denote the base of natural logarithms.

Leonhard Euler: *Introductio in analysis infinitorum* (1748)

Pripomenutie: Eulerovo číslo e sme 14. marca 2024 (MANb10) definovali spôsobom

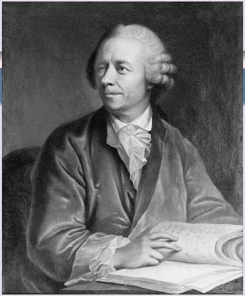
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Veta III.9

Nech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\mathrm{e}$.

Dôsledok (Vety III.9 a Heineho vety)

$$(\forall a\in\mathbb{R})\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\mathrm{e}^a$$



Veta V.7

(i) $(\forall a\in\mathbb{R})\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\mathrm{e}^a$

(ii) $(\forall a\in\mathbb{R})\quad \lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^a$

(iii) $(\forall a>0, a\neq 1)\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a \mathrm{e}$

(iv) $(\forall a>0, a\neq 1)\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

Ďalšia dôležitá limita funkcie... a opäť Euler?

Moreover, for the sake of brevity, let us put for this number 2,71... etc. consistently the letter e, which therefore shall denote the base of natural logarithms.

Leonhard Euler: *Introductio in analysis infinitorum* (1748)

Pripomenutie: Eulerovo číslo e sme v MANa definovali spôsobom $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Dôsledok (analytický predpis exponenciálnej funkcie)

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad \lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = \mathrm{e}^x$$

Poznámka: Z predchádzajúcich tvrdení a Vety o limite zloženej funkcie jednoducho dostaneme:

Skratka: urýchlenie výpočtu limít súvisiacich s Eulerovým číslom

Nech $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

(i) Ak $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie $\frac{\mathrm{e}^{f(x)}-1}{f(x)}$, tak $\lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{e}^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$.

(ii) Ak $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie $\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}$, tak $\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$.

Príklad: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Príklad: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{-1/x^2}\right)^{\ln(1+x^2)}$.

(II) Nevlastné limity funkcie

Pozorovanie: pri niektorých doteraz počítaných limitách sme používali úvahy, ktoré sa zdajú byť z hľadiska našich skúseností v narábaní s limitou postupnosti prirodzené, napr. „ak $x \to 0$, tak $1/x^2 \to +\infty$ a $e^{1/x^2} \to +\infty$“. Teraz tieto úvahy zlegalizujeme a vytvoríme k nim potrebnú teóriu.

Motivačný príklad

Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Úvahy, otázky, problémy:

(a) keďže žiadnu vetu o výpočte limity funkcie $f(x)^{g(x)}$ vo všeobecnosti nemáme (ani mať nebudeme!), najprv urobíme prepis

$$(1 - \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1 - \cos x)}$$

za predpokladu, že $f(x) = 1 - \cos x > 0$ na nejakom okolí bodu $x_0 = 0$;

(b) už vieme, že $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, a teda $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 - 1 = 0$;

(c) ako sa správa kompozícia $\ln f(x)$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

(d) ako sa správa funkcia $g(x) = \frac{1}{x}$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

(e) ako sa správa súčin $g(x) \ln f(x)$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

(f) ako sa nakoniec správa kompozícia $e^{g(x) \ln f(x)}$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

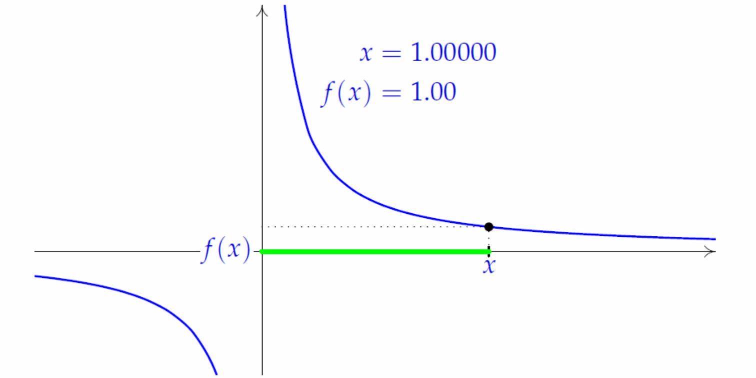
Pomôcť nám môže Veta o limite zloženej funkcie, ale potrebujeme vedieť zodpovedať vyššie položené otázky (súvisiace s nevlastnou limitou funkcie).

(II) Nevlastné limity funkcie – zopakovanie

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Pripomenutie: okolie bodu $+\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$
okolie bodu $-\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$

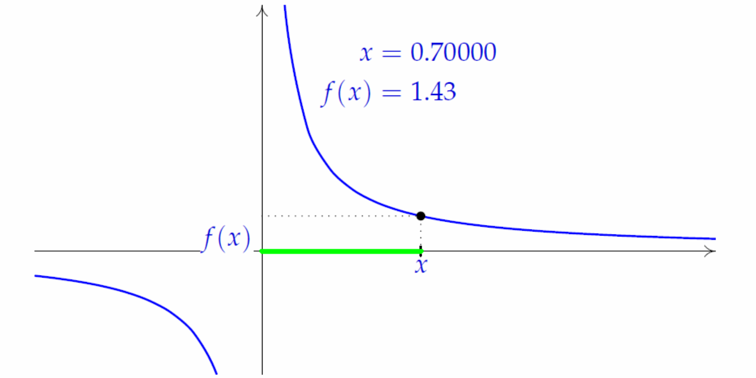


(II) Nevlastné limity funkcie – zopakovanie

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Pripomenutie: okolie bodu $+\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$
okolie bodu $-\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$

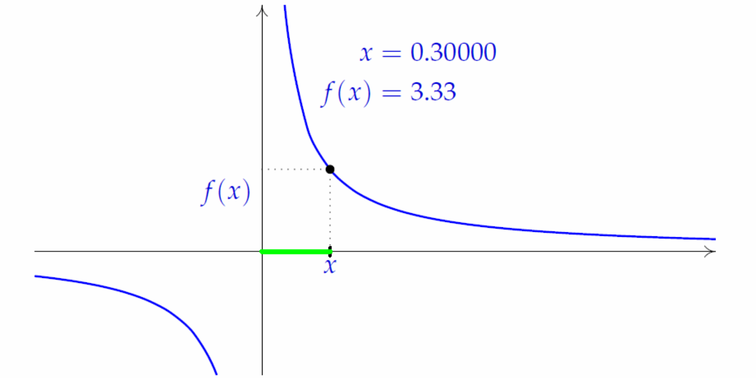


(II) Nevlastné limity funkcie – zopakovanie

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathcal{O}(a))(\exists \mathcal{O}(x_0))(\forall x \in \mathcal{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathcal{O}(a)$.

Pripomenutie: okolie bodu $+\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$
okolie bodu $-\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$

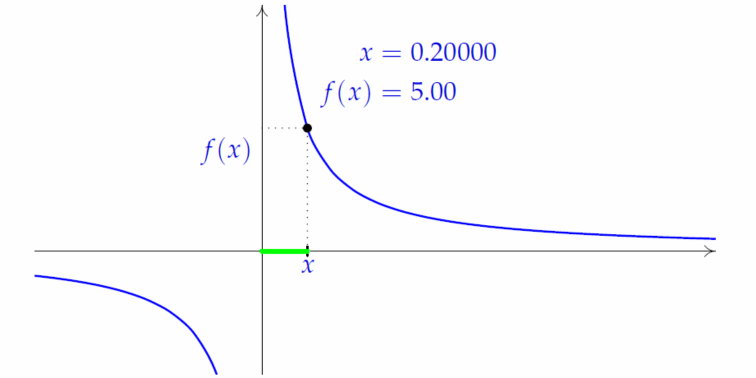


(II) Nevlastné limity funkcie – zopakovanie

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Pripomenutie: okolie bodu $+\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$
okolie bodu $-\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$

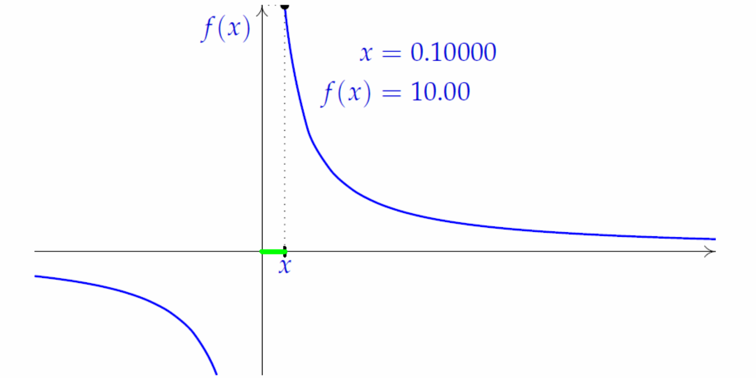


(II) Nevlastné limity funkcie – zopakovanie

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Pripomenutie: okolie bodu $+\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$
okolie bodu $-\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$

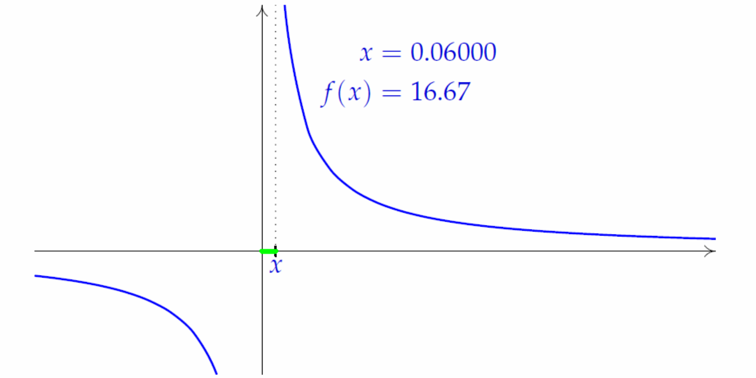


(II) Nevlastné limity funkcie – zopakovanie

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Pripomenutie: okolie bodu $+\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$
okolie bodu $-\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$

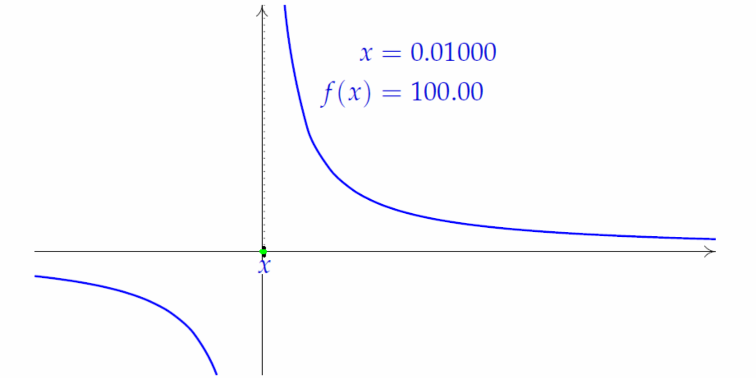


(II) Nevlastné limity funkcie – zopakovanie

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Pripomenutie: okolie bodu $+\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$
okolie bodu $-\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$



(II) Nevlastné limity funkcie – zopakovanie

Topologická (super)definícia limity funkcie

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f. Hovoríme, že číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je limitou funkcie f v bode x_0, akk $(\forall \mathscr{O}(a))(\exists \mathscr{O}(x_0))(\forall x \in \mathscr{O}^*(x_0) \cap D_f)\, f(x) \in \mathscr{O}(a)$.

Pripomenutie: okolie bodu $+\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(a, +\infty)$, kde $a \in \mathbb{R}$
okolie bodu $-\infty$ je ľubovoľný otvorený interval $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbb{R}$

(II$_1$) nevlastná limita $a = +\infty$ vo vlastnom bode $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > \varepsilon\big)$$

(II$_2$) nevlastná limita $a = +\infty$ v nevlastnom bode $x_0 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(x > \delta \;\Rightarrow\; f(x) > \varepsilon\big)$$

(II$_3$) nevlastná limita $a = +\infty$ v nevlastnom bode $x_0 = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(x < -\delta \;\Rightarrow\; f(x) > \varepsilon\big)$$

(II$_4$) nevlastná limita $a = -\infty$ vo vlastnom bode $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) < -\varepsilon\big)$$

(II$_5$) nevlastná limita $a = -\infty$ v nevlastnom bode $x_0 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(x > \delta \;\Rightarrow\; f(x) < -\varepsilon\big)$$

(II$_6$) nevlastná limita $a = -\infty$ v nevlastnom bode $x_0 = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \big(x < -\delta \;\Rightarrow\; f(x) < -\varepsilon\big)$$

Motivačný príklad

Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1-\cos x)\right)$.

(c) Ako sa správa kompozícia $\ln f(x)$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

(II_4) nevlastná limita $a = -\infty$ vo vlastnom bode $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \left(0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) < -\varepsilon\right)$$

Príklad: Dokážte, že $\lim\limits_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$.

(f) ako sa správa kompozícia $e^{g(x)\ln f(x)}$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

(II_2) nevlastná limita $a = +\infty$ v nevlastnom bode $x_0 = +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \left(x > \delta \ \Rightarrow\ f(x) > \varepsilon\right)$$

Príklad: Dokážte, že $\lim\limits_{z\to\infty} e^z = +\infty$.

(I_3) vlastná limita $a \in \mathbb{R}$ v nevlastnom bode $x_0 = -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D_f)\ \left(x < -\delta \ \Rightarrow\ |f(x) - a| < \varepsilon\right)$$

Príklad: Dokážte, že $\lim\limits_{z\to -\infty} e^z = 0$.

(Domáca) Úloha: Odvoďte limitné správanie sa funkcií a^x a $\log_a x$ pre $a > 0$, $a \neq 1$!

Motivačný príklad

Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1-\cos x)\right)$.

(d) ako sa správa funkcia $g(x) = \frac{1}{x}$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

Veta (o vzťahu medzi nevlastnou a nulovou limitou funkcie)

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod D_f.

(i) Ak $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$, tak existuje $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$ a platí $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(ii) Ak $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a existuje $\mathscr{O}^*(x_0)$, na ktorom je f kladná, tak $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(iii) Ak $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a existuje $\mathscr{O}^*(x_0)$, na ktorom je f záporná, tak $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Príklad: Dokážte, že $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ a $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Motivačný príklad

Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1-\cos x)\right)$.

(e) ako sa správa súčin $g(x)\ln f(x)$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

Veta (o operáciách s nevlastnými limitami funkcie)

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $D_f \cap D_g$.

(i) Nech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ a existuje $\mathscr{O}^*(x_0)$, na ktorom je g ohraničená zdola. Potom $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = +\infty$.

(ii) Nech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ a existuje $\mathscr{O}^*(x_0)$, na ktorom je g ohraničená zdola kladnou konštantou. Potom $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = +\infty$.

(iii) Nech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a existuje $\mathscr{O}^*(x_0)$, na ktorom je g kladná. Potom

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}(x) = \begin{cases} +\infty, & c>0 \\ -\infty, & c<0 \end{cases}.$$

Motivačný príklad

Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1-\cos x)\right)$.

(e) ako sa správa súčin $g(x)\ln f(x)$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

Dôsledok

Nech $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $D_f \cap D_g$.

(i) Ak $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$, tak $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = +\infty$.

(ii) Ak $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = a > 0$, tak $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = +\infty$.

(iii) Ak $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ a $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, tak $\lim_{x\to x_0}(c\cdot f)(x) = \begin{cases} +\infty, & c > 0 \\ -\infty, & c < 0 \end{cases}$.

Príklad: Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1-\cos x)$.

Motivačný príklad – zhrnutie

Vypočítajte (ak existuje) limitu $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1-\cos x)\right)$.

(c) ako sa správa kompozícia $\ln f(x)$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

Keďže $\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$ a $f(x) = 1-\cos x > 0$ na $\mathscr{O}^*_{\frac{\pi}{2}}(0)$, podľa Vety o limite zloženej funkcie platí

$$\lim_{x\to 0}\ln(1-\cos x) = \lim_{y\to 0+}\ln y = -\infty.$$

(d) ako sa správa funkcia $g(x) = \frac{1}{x}$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

Limita $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje, ale existujú nevlastné jednostranné limity $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty$ a $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty$.

(e) ako sa správa súčin $g(x)\ln f(x)$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

Podľa predchádzajúceho kroku nemôžeme očakávať existenciu limity, ale pozrieme sa na jednostranné limity

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\ln(1-\cos x) = -\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}\ln(1-\cos x) = +\infty$$

podľa Dôsledku Vety o operáciách s nevlastnými limitami.

(f) ako sa nakoniec správa kompozícia $\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$ na okolí bodu $x_0 = 0$?

Vyššie popísanú situáciu by ešte mohla zachrániť limita vonkajšej zložky, avšak

$$\lim_{x\to 0+}\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1-\cos x)\right) = \lim_{z\to -\infty}\mathrm{e}^z = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0-}\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1-\cos x)\right) = \lim_{z\to +\infty}\mathrm{e}^z = +\infty$$

podľa Vety o limite zloženej funkcie. Teda uvedená limita v motivačnom príklade **neexistuje**.