Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

`umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html`

Prednáška 17

11. apríla 2024

Asymptoty grafu funkcie – použitie limít

We're like asymptotes. We can get closer and closer (absolutely close) but can never get together.

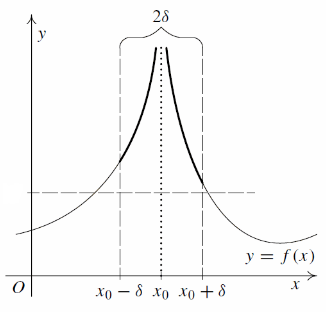
Definícia – asymptota bez smernice (ABS)

Nech $x_0 \in \mathbb{R}$ je hromadný bod D_f. Priamku $p : x = x_0$ nazývame asymptota bez smernice grafu funkcie f, akk

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \vee \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \vee \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Poznámky:

- adeptmi na ABS sú hromadné body D_f, v ktorých f nie je definovaná;
- v závislosti od D_f môže mať funkcia f
  - – žiadnu ABS, napr. e^x, $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\frac{\sin x}{x}$, atď.
  - – konečný počet ABS, napr. $\ln x$, $\mathrm{e}^{1/x}$, $\frac{1}{x(x-5)(x-1)^2}$, atď.
  - – nekonečne veľa ABS, napr. $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, atď.



Príklad: Nájdite všetky ABS grafu funkcie

$$f : y = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x-2}}.$$

Asymptoty grafu funkcie – použitie limít

We're like asymptotes. We can get closer and closer (absolutely close) but can never get together.

Definícia – asymptota so smernicou (ASS)

Nech $+\infty$ $[-\infty]$ je hromadný bod D_f. Priamku $p : y = ax + b$ nazývame asymptota so smernicou grafu funkcie f v bode $+\infty$ $[-\infty]$, akk

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0 \quad \left[\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0\right].$$

Poznámky:

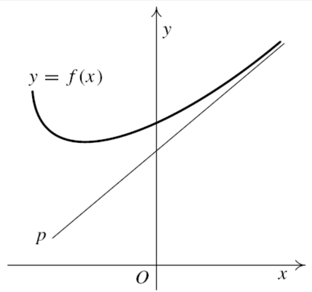
- definícia ASS vyžaduje, aby f bola definovaná na okolí bodu $+\infty$, resp. na okolí bodu $-\infty$;
- ASS je priamka, ktorej vzdialenosť od grafu funkcie v bode $+\infty$, resp. v bode $-\infty$ je nulová;
- v závislosti od D_f môže mať funkcia f

  – žiadnu ASS, napr. $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$, $\ln x$, x^2, atď.

  – jednu ASS, napr. x, $\frac{\sin x}{x}$, e^{-1/x^2}, $\frac{1}{x}$, atď.

  – dve ASS, napr. $\operatorname{arctg} x$, $|x|$, atď.

  Žiadna iná možnosť neexistuje!



Ako určiť (vypočítať) koeficienty ASS?

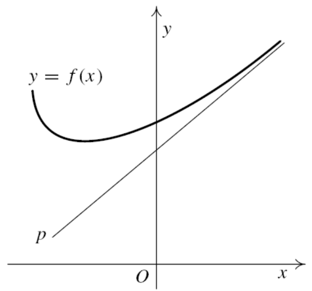
Asymptoty grafu funkcie

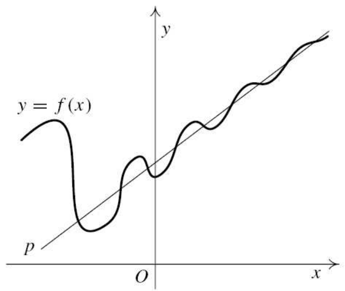
We're like asymptotes. We can get closer and closer (absolutely close) but can never get together.

Veta (o výpočte koeficientov asymptoty so smernicou)

Nech $\pm\infty$ je hromadný bod D_f. Priamka $p: y = ax + b$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v bode $\pm\infty$ práve vtedy, keď

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}.$$





Asymptoty grafu funkcie

We're like asymptotes. We can get closer and closer (absolutely close) but can never get together.

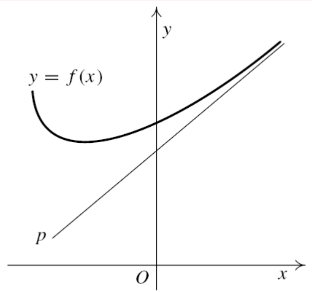
Veta (o výpočte koeficientov asymptoty so smernicou)

Nech $\pm\infty$ je hromadný bod D_f. Priamka $p : y = ax + b$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v bode $\pm\infty$ práve vtedy, keď

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}.$$

Príklad: Nájdite všetky ASS grafu funkcie

$$f : y = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x-2}}.$$



Spojitosť funkcie v bode – zopakovanie

> Here we call a quantity y a continuous function of x, if after choosing a quantity ε the existence of δ can be proved, such that for any value between $x_0 - \delta$ and $x_0 + \delta$ the corresponding value of y lies between $y_0 - \varepsilon$ and $y_0 + \varepsilon$.
>
> Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1874)

Definícia – spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ [|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

– v izolovanom bode $x_0 \in D_f$ je každá funkcia spojitá!

– ako súvisí spojitosť funkcie v hromadnom bode s limitou funkcie?

Charakterizácia spojitosti funkcie v bode

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

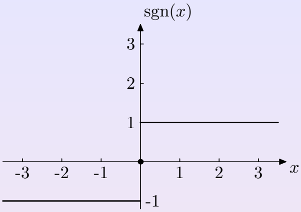
(i) f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$;

(ii) $(\forall \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0)))(\exists \mathscr{O}_\delta(x_0))(\forall x \in D_f)\,[x \in \mathscr{O}_\delta(x_0) \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0))]$;

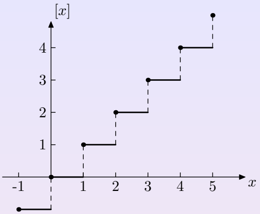
(iii) $\left(\forall (x_n)_1^\infty \in \mathbb{N}^\mathbb{R}, x_n \in D_f\right)\ x_n \to x_0 \ \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.

Ak x_0 je hromadný bod D_f, potom každá z predchádzajúcich podmienok je ekvivalentná s podmienkou

(iv) existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



"hrubo" nespojitá



"jednostranne" nespojitá

Definícia – jednostranná spojitosť funkcie v bode

Hovoríme, že f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$ sprava [zľava], akk pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in D_f$ platí, že ak $x \in \langle x_0, x_0 + \delta)$ [$x \in (x_0 - \delta, x_0\rangle$], tak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dôležité pozorovania:

(i) ak f je definovaná len na nejakom pravom [ľavom] okolí bodu $x_0 \in D_f$, tak spojitosť f v bode x_0 je ekvivalentná spojitosti f sprava [zľava] v x_0;

(ii) ak $x_0 \in D_f$ je izolovaný bod, tak podľa definície f je zrejme spojitá sprava aj zľava v bode x_0 (a už vieme, že je tam aj spojitá!).

Veta (charakterizácia pravostrannej spojitosti funkcie v bode)

Nech $x_0 \in D_f$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

(i) f je spojitá v bode x_0 sprava;

(ii) $(\forall \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0)))(\exists \mathscr{O}_\delta^+(x_0))(\forall x \in D_f)\,[x \in \mathscr{O}_\delta^+(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathscr{O}_\varepsilon(f(x_0))]$;

(iii) $\left(\forall (x_n)_1^\infty \in \mathbb{N}^\mathbb{R}, x_n \in D_f\right)\, x_n \to x_0^+ \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.

Ak x_0 je hromadný bod množiny $D_f \cap \langle x_0, +\infty)$, potom každá z predchádzajúcich podmienok je ekvivalentná s podmienkou

(iv) existuje $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

— ako súvisí jednostranná spojitosť a spojitosť funkcie v bode?

— pre izolované body oba pojmy splývajú!!! A pre hromadné body?

Veta V.8

Nech $x_0 \in D_f$ je hromadný bod množín $D_f \cap \langle x_0, +\infty)$ a $D_f \cap (-\infty, x_0\rangle$. Funkcia f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, keď f je spojitá v x_0 sprava a súčasne zľava.

Klasifikácia bodov nespojitosti funkcie (v hromadnom bode D_f!!!)

Fakt: ak f nie je definovaná v bode x_0, nemôže tam byť spojitá! Dôvody nespojitosti sa dajú rozdeliť do 3 (disjunktných) skupín:

(i) bod $x_0 \notin D_f$ nazývame bod odstrániteľnej nespojitosti funkcie f, akk existuje vlastná limita $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$;

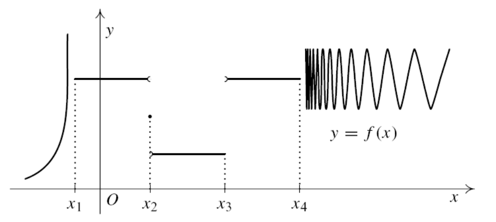
Príklad: bod $x_0 = 0$ je bod odstrániteľnej nespojitosti funkcie $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

(ii) bod x_0 nazývame bod neodstrániteľnej nespojitosti 1. druhu funkcie f, akk existujú konečné jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$;

Príklad: bod $x_0 = 0$ je bod neodstrániteľnej nespojitosti 1. druhu funkcie $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$

(iii) bod x_0 nazývame bod neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu funkcie f, akk aspoň jedna z jednostranných limít neexistuje alebo je nevlastná;

Príklad: bod $x_0 = 0$ je bod neodstrániteľnej nespojitosti 2. druhu funkcie $f(x) = \sin \frac{1}{x}$



Operácie so spojitými funkciami – zopakovanie

Pripomenutie: funkcia je triviálne spojitá v každom izolovanom bode svojho definičného oboru!
funkcia f je spojitá v hromadnom bode $x_0 \in D_f \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Veta (o zovretí pre spojité funkcie)

Nech f, g sú spojité v bode $x_0 \in D_f \cap D_g \cap D_h$ a $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$. Ak $(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathscr{O}_\delta(x_0))\ f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, potom h je spojitá v bode x_0.

Poznámky:

– podmienka $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$ sa z predpokladov nedá vynechať!
– spojitá funkcia v bode x_0 je ohraničená na nejakom okolí bodu x_0

Veta (algebrické operácie so spojitosťou funkcie)

Nech f, g sú spojité v bode $x_0 \in D_f \cap D_g$. Potom $f \pm g$, $f \cdot g$ a $|f|$ sú spojité v bode x_0. Ak naviac $g(x_0) \neq 0$, tak aj $\frac{f}{g}$ je spojitá v bode x_0.

Poznámky a príklady:

– mocninná funkcia $\mathrm{moc}_m : x \mapsto x^m$, $m \in \mathbb{Z}$, je spojitá v každom bode $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (výnimky!);
– polynóm $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je spojitá funkcia v každom bode $x_0 \in \mathbb{R}$;
– racionálna funkcia $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je spojitá v každom $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{z \in \mathbb{R}; Q(z) = 0\}$;

Operácie so spojitými funkciami – zopakovanie

Pripomenutie: funkcia je triviálne spojitá v každom izolovanom bode svojho definičného oboru!
funkcia f je spojitá v hromadnom bode $x_0 \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$. Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Poznámky:

– Veta o spojitosti zloženej funkcie v prípade hromadného bodu $x_0 \in D_g$ a hromadného bodu $y_0 = g(x_0) \in D_f$ tvrdí, že

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \;\wedge\; \lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0) \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y \to y_0} f(y) = (f \circ g)(x_0),$$

čo je nami „túžobne" očakávaný výsledok legalizujúci mnohé naše výpočty prevádzané doteraz!

– aké sú podstatné rozdiely medzi Vetou o spojitosti zloženej funkcie a Vetou o limite zloženej funkcie?

– Veta o spojitosti zloženej funkcie dáva iba postačujúcu podmienku spojitosti kompozície, nie však nutnú, ako už vieme z príkladu $f = g = \chi$ uvedeného pri Vete o limite zloženej funkcie

Operácie so spojitými funkciami

Veta V.10

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

- ✓ konštantná funkcia, identita, mocninná funkcia moc_m pre $m \in \mathbb{Z}$
- ✓ polynóm, racionálna lomená funkcia
- ✓ exponenciálna funkcia e^x
- ✓ hyperbolické funkcie
- ✓ všeobecná exponenciálna funkcia $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ✓ funkcia sínus a kosínus: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ ostatné goniometrické funkcie
- ? logaritmická funkcia, všeobecná mocninná funkcia moc_α pre $\alpha \in \mathbb{R}$, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie – čoskoro (veta o spojitosti inverznej funkcie)

Poznámka: aj mnohé neelementárne funkcie sú spojité na svojich definičných oboroch, napr. integrálny sínus $\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, Eulerova gama funkcia $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, atď. (zatiaľ sme na porozumenie a zdôvodnenie toho nevyzreli :)), ale neelementárne funkcie sgn, či E nie sú spojité!