Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 18

15. apríla 2024

Operácie so spojitými funkciami – zopakovanie

Pripomenutie: funkcia je triviálne spojitá v každom izolovanom bode svojho definičného oboru!
funkcia f je spojitá v hromadnom bode $x_0 \in D_f \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Veta (o spojitosti zloženej funkcie)

Nech g je spojitá v bode $x_0 \in D_g$ a f je spojitá v bode $y_0 = g(x_0) \in D_f$.
Potom $f \circ g$ je spojitá v bode x_0.

Poznámky:

– Veta o spojitosti zloženej funkcie v prípade hromadného bodu $x_0 \in D_g$ a hromadného bodu $y_0 = g(x_0) \in D_f$ tvrdí, že

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \;\wedge\; \lim_{y\to y_0} f(y) = f(y_0) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = \lim_{y\to y_0} f(y) = (f\circ g)(x_0),$$

čo je nami „túžobne“ očakávaný výsledok legalizujúci mnohé naše výpočty prevádzané doteraz!

– aké sú podstatné rozdiely medzi Vetou o spojitosti zloženej funkcie a Vetou o limite zloženej funkcie?

– Veta o spojitosti zloženej funkcie dáva iba postačujúcu podmienku spojitosti kompozície, nie však nutnú, ako už vieme z príkladu $f = g = \chi$ uvedeného pri Vete o limite zloženej funkcie

Operácie so spojitými funkciami

Veta V.10

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

- ✓ konštantná funkcia, identita, mocninná funkcia moc_m pre $m \in \mathbb{Z}$
- ✓ polynóm, racionálna lomená funkcia
- ✓ exponenciálna funkcia e^x
- ✓ hyperbolické funkcie
- ✓ všeobecná exponenciálna funkcia $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pre $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in \mathbb{R}$
- ✓ funkcia sínus a kosínus: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ pre $x \in \mathbb{R}$
- ✓ ostatné goniometrické funkcie
- ? logaritmická funkcia, všeobecná mocninná funkcia moc_α pre $\alpha \in \mathbb{R}$, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie – čoskoro (veta o spojitosti inverznej funkcie)

Poznámka: aj mnohé neelementárne funkcie sú spojité na svojich definičných oboroch, napr. integrálny sínus $\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, Eulerova gama funkcia $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, atď. (zatiaľ sme na porozumenie a zdôvodnenie toho nevyzreli :)), ale neelementárne funkcie sgn, či E nie sú spojité!

Spojitosť funkcie v bode a „bod po bode“

Definícia – spojitosť funkcie v bode

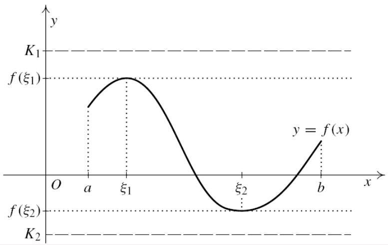
Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $x_0 \in D_f$, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ [|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Definícia – spojitosť funkcie na množine

Hovoríme, že funkcia f je spojitá na množine $M \subseteq D_f$ (píšeme $f \in \mathscr{C}(M)$), akk f je spojitá v každom bode množiny M.

Kvantifikovane: $f \in \mathscr{C}(M) \ \Leftrightarrow\ (\forall x_0 \in M)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)\ [|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$

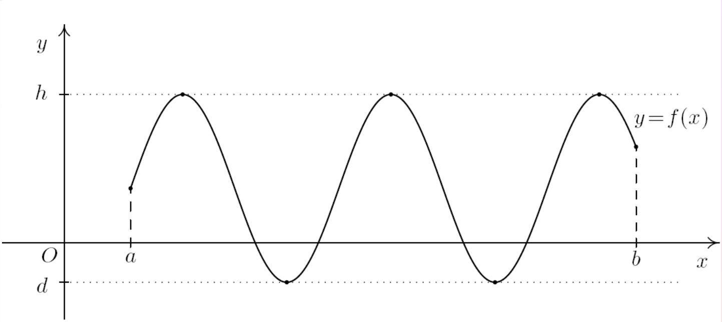


With his theorem, which states that a *continuous* function of a real variable actually attains its least upper and greatest lower bounds, i.e., necessarily possesses a maximum and a minimum, Weierstrass created a tool which today is indispensable to all mathematicians for more refined analytical or arithmetical investigations.

Hilbert: *Gesammelte Abh.*, vol. 3 (1897), p. 333

Weierstrassova veta o ohraničenosti (1861)

Každá spojitá funkcia na uzavretom intervale je na tomto intervale ohraničená.

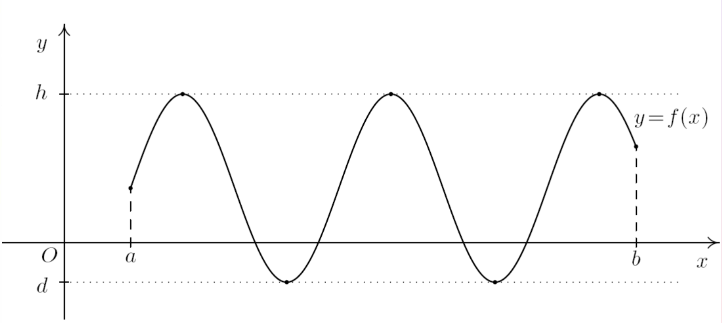


KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815–1897)

> With his theorem, which states that a *continuous* function of a real variable actually attains its least upper and greatest lower bounds, i.e., necessarily possesses a maximum and a minimum, Weierstrass created a tool which today is indispensable to all mathematicians for more refined analytical or arithmetical investigations.
>
> Hilbert: *Gesammelte Abh.*, vol. 3 (1897), p. 333

Weierstrassova veta o maxime a minime (1861)

Každá spojitá funkcia na uzavretom intervale nadobúda na tomto intervale maximum a minimum.



KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815–1897)

> With his theorem, which states that a *continuous* function of a real variable actually attains its least upper and greatest lower bounds, i.e., necessarily possesses a maximum and a minimum, Weierstrass created a tool which today is indispensable to all mathematicians for more refined analytical or arithmetical investigations.
>
> Hilbert: *Gesammelte Abh.*, vol. 3 (1897), p. 333

Weierstrassova veta o ohraničenosti/o maxime a minime (1861)

Každá spojitá funkcia na uzavretom intervale je na ňom ohraničená a nadobúda na tomto intervale maximum a minimum.

- podmienka uzavretosti intervalu dôležitá, lebo funkcia $f(x) = 1/x$ na intervale $(0, 1\rangle$ nie je ohraničená (a teda nemá supremum!) a funkcia $f(x) = x^2$ na intervale $(0, 1)$ je síce ohraničená, ale nenadobúda svoje infimum a supremum;
- podmienka spojitosti sa tiež nedá vynechať, napr.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in \langle -1, 0), \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x \in (0, 1\rangle \end{cases}$$

nie je spojitá a nenadobúda infimum ani supremum.

Samozrejme, pri nespojitých funkciách môže byť situácia ešte zaujímavejšia!

Rovnomerná spojitosť funkcie na množine

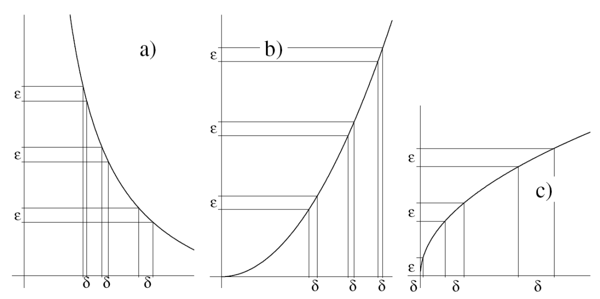
> It has apparently not yet been observed, that ... continuity at any single point ... is not the continuity ... which can be called *uniform continuity*, because it extends uniformly to all points and in all directions.
>
> Heine: *Ueber trigonometrische Reihen* (1870), p. 361

Funkciu f sme nazvali spojitá na množine $M \subseteq D_f$, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in M)(\exists \delta > 0)(\forall y \in M)\ [|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$

Otázka: čo ak zameníme poradie kvantifikátorov?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall y \in M)\ [|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$



It has apparently not yet been observed, that ... continuity at any single point ... is not the continuity ... which can be called *uniform continuity*, because it extends uniformly to all points and in all directions.

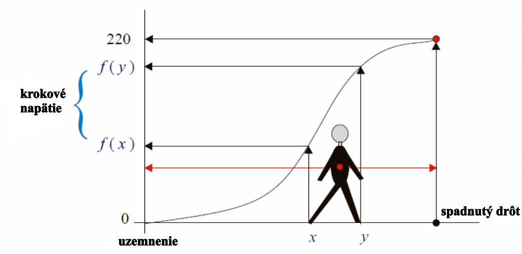
Heine: *Ueber trigonometrische Reihen* (1870), p. 361

Definícia – rovnomerná spojitosť funkcie na množine

Funkciu f nazývame rovnomerne spojitá na množine $M \subseteq D_f$ (píšeme $f \in \mathscr{C}_u(M)$), akk $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x, y \in M, |x - y| < \delta)\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Poznámka: spojitosť na množine je bodová záležitosť, ale rovnomerná spojitosť nemá zmysel bodovo!

Ako to zažiť na vlastnej koži?: Nech na reálnej osi je v každom bode určité napätie. Ak funkcia určujúca napätie je rovnomerne spojitá, môžeme nájsť dĺžku kroku, s ktorou sa môžeme po reálnej osi (bezpečne) prechádzať (takzvané „krokové napätie“), t.j. ak požadujeme rozdiel napätia ε, nájdeme veľkosť kroku δ.



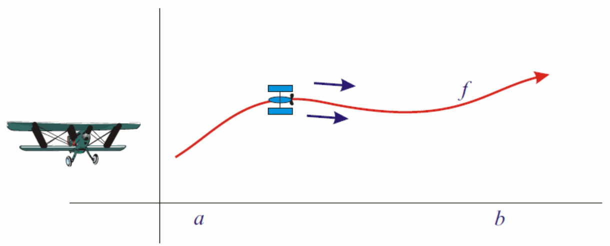
It has apparently not yet been observed, that ... continuity at any single point ... is not the continuity ... which can be called *uniform continuity*, because it extends uniformly to all points and in all directions.

Heine: *Ueber trigonometrische Reihen* (1870), p. 361

Definícia – rovnomerná spojitosť funkcie na množine

Funkciu f nazývame rovnomerne spojitá na množine $M \subseteq D_f$ (píšeme $f \in \mathscr{C}_u(M)$), akk $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x, y \in M, |x - y| < \delta)\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Geometrická predstava rovnomernej spojitosti: Predstavme si, že po grafe funkcie letí dvojplošník, ktorý sa nesmie dotknúť grafu dolným ani horným krídlom. Pred letom si môžeme upraviť lietadlo (krídla sú od seba vzdialené o ε a sú dlhé δ). Ak sa let podarí, je funkcia rovnomerne spojitá.

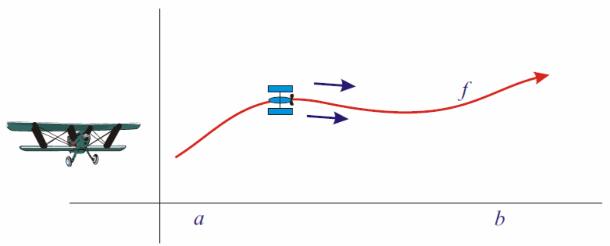


It has apparently not yet been observed, that ... continuity at any single point ... is not the continuity ... which can be called *uniform continuity*, because it extends uniformly to all points and in all directions.

Heine: *Ueber trigonometrische Reihen* (1870), p. 361

Definícia – rovnomerná spojitosť funkcie na množine

Funkciu f nazývame rovnomerne spojitá na množine $M \subseteq D_f$ (píšeme $f \in \mathscr{C}_u(M)$), akk $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x, y \in M, |x - y| < \delta)\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



Pozorovanie: $f \in \mathscr{C}_u(M) \;\Leftrightarrow\; (\forall x_n, y_n \in M) \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$

Veta V.11

$\mathscr{C}_u(M) \subseteq \mathscr{C}(M)$

The general ideas of the proof of several theorems in § 3 according to the principles of Mr. Weierstrass are known to me by oral communications from himself, from Mr. Schwarz and Mr. *Cantor*, so that ...

Heine: *Die Elemente der Funktionenlehre* (1872), p. 182

Veta (Heineho-Cantorova, 1872)

$\mathscr{C}_u\langle a, b\rangle = \mathscr{C}\langle a, b\rangle$

EDUARD HEINE (1821–1881)

GEORG CANTOR (1845–1918)