Séria úloh 1: Axiomatika reálnych čísel

Áno, len sa čudujte: nič sa tak veľmi nepáči učiteľovi, ako keď sa jeho žiaci čudujú. Čudovanie je základ, na ktorom možno budovať celé pyramídy vedomostí.

Úloha 1. Pre každé $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ odvoďte rovnosti:

a) $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$

b) $((a + b) + c) + d = a + (b + (c + d))$

Úloha 2. Nech $\mathbb{P} = \{\clubsuit, \diamondsuit\}$, kde $\clubsuit$ a $\diamondsuit$ sú dva rôzne prvky. V $\mathbb{P}$ definujme $\clubsuit + \clubsuit = \clubsuit$, $\clubsuit + \diamondsuit = \diamondsuit$, $\diamondsuit + \clubsuit = \diamondsuit$ a $\diamondsuit + \diamondsuit = \clubsuit$. Overte, či platia všetky axiómy sčítania na množine $\mathbb{P}$.

Úloha 3. Urobte to isté ako v predchádzajúcej úlohe pre tri rôzne prvky $\bigcirc, \triangle, \square$, ak platia vzťahy $\bigcirc + \bigcirc = \triangle + \square = \square + \triangle = \bigcirc$, $\bigcirc + \triangle = \triangle + \bigcirc = \square + \square = \triangle$ a $\bigcirc + \square = \square + \bigcirc = \triangle + \triangle = \square$.

Úloha 4. Na množine $\mathbb{P}$ z Úlohy 2 doplňme počtové úkony nasledujúco: $\clubsuit \cdot \clubsuit = \clubsuit \cdot \diamondsuit = \diamondsuit \cdot \clubsuit = \clubsuit$ a $\diamondsuit \cdot \diamondsuit = \diamondsuit$. Overte, či platia všetky axiómy násobenia na množine $\mathbb{P}$. Čo hrá úlohu čísla 1?

Úloha 5. Dokážte, že

a) $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)\ \gamma \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}\gamma = \dfrac{\gamma\alpha}{\beta}$

b) ak $\alpha \neq 0$ a $\beta \neq 0$, tak $\dfrac{\alpha}{\beta} \neq 0$;

c) $(\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0, \delta \neq 0)\ \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$

d) ak $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$, tak $\alpha\delta = \beta\gamma$. Doplňte predpoklady, aby tento výrok bol pravdivý a dokážte ho.

e) ak $\dfrac{\alpha}{\beta} \leq \dfrac{\gamma}{\delta}$, tak $\dfrac{\alpha + \beta}{\beta} \leq \dfrac{\gamma + \delta}{\delta}$;

f) $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\ (a < b \wedge c < d \ \Rightarrow\ ad + bc < ac + bd)$;

g) Nech $\alpha \neq \beta$. Potom $\alpha < \xi < \beta$ alebo $\beta < \xi < \alpha$ práve vtedy, keď $(\alpha - \xi)(\xi - \beta) > 0$.

h) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ (a + c = b + c \ \Rightarrow\ a = b)$;

i) $0 < 1$

Úloha 6. Uvažujme nasledujúce axiómy:

(W_1) Pre každé w nastáva práve jedna z možností: $w > 0$ alebo $w = 0$ alebo $w < 0$.

(W_2) Súčet a súčin dvoch kladných čísel je kladné číslo.

Ktorý z prvkov Úlohy 2 a Úlohy 4 môžeme označiť za kladný tak, aby platili axiómy (W_1) a (W_2)?

Úloha 7. Dokážte nasledujúce tvrdenia

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists c \in \{-1, 1\})\ |x| = cx$

b) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall c \in \{-1, 1\})\ cx \leq |x|$

c) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$