Séria úloh 2: Matematická indukcia

Aj opice sú schopné vyhodiť kameň do výšky a pozorovať jeho pád, avšak iba človek vie vyrátať tento jav. Len keď počítam, som sám sebou: ***Computo ergo sum.***

Úloha 1. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

c) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

d) $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(2n-1)^2 = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2} - \frac{1}{2}$

e) $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ pre $x \neq 1$

f) $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$ pre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

g)* $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ odmocnín}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

Úloha 2. Kde je chyba v nasledujúcom dôkaze tvrdenia

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ 1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n+1) \cdot 3^n = n \cdot 3^{n+1}?$$

Dôkaz: Nech výrok platí pre nejaké $k \in \mathbb{N}_0$. Potom

$$1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + \cdots + (2k+3) \cdot 3^{k+1} = k \cdot 3^{k+1} + (2k+3) \cdot 3^{k+1} = (3k+3) \cdot 3^{k+1} = (k+1) \cdot 3^{k+2},$$

čo sme chceli dokázať.

Úloha 3. Dokážte, že platí:

a) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2)\ n + 1 < 2^n$

b) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5)\ 2^{n+3} < (n+1)!$

c) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} \geq \frac{1}{3}$

d) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$

e) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

f) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$

g) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2)\ 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$

h) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2)\ \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} < 1$

j) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2)\ 2! \cdot 4! \dots (2n)! > [(n+1)!]^n$

k)* $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}, 1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n)\ \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < 1$

l)* $(\forall n \in \mathbb{N})\ \left|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$, kde $x_1, \dots, x_n \in \langle 0, \pi \rangle$

Úloha 4. *Lucasove čísla* $\mathcal{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$, sú dané počiatočnými hodnotami $\mathcal{L}_1 = 1$, $\mathcal{L}_2 = 3$ a rekurentným vzťahom

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n-1} + \mathcal{L}_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $\mathcal{L}_n < (1{,}75)^n$.

Úloha 5. Nech $\mathcal{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

a) $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \cdots + \mathcal{H}_n = (n+1)\mathcal{H}_n - n$

b)* $1 + \frac{n}{2} \leq \mathcal{H}_{2^n}$.

Úloha 6. Kde je chyba v nasledujúcom dôkaze tvrdenia

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že ak $x, y \in \mathbb{N}$ také, že $\max\{x, y\} = n$, tak $x = y$?

Dôkaz: Ak $n = 1$ a $\max\{x, y\} = 1$, tak $x = 1$ a $y = 1$. Nech výrok platí pre nejaké $k \in \mathbb{N}_0$, teda ak $x, y \in \mathbb{N}$ sú také, že $\max\{x, y\} = k$, tak $x = y$. Potom ale tvrdenie $\max\{x, y\} = k + 1$ je ekvivalentné s $\max\{x - 1, y - 1\} = k$, čo podľa indukčného predpokladu znamená, že $x - 1 = y - 1$, čiže $x = y$. Podľa Vety o matematickej indukcii výrok platí pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 7. Nájdite zložené funkcie $f_2 = f \circ f, f_3 = f \circ f \circ f, \dots f_n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ak:

a) $f : y = 1 + x$;

b) $f : y = 1 - x$;

c) $f : y = \frac{1 + x}{x}$.

Úloha 8. Nájdite deriváciu n-tého rádu funkcie $y = f(x)$, ak

a) $y = \ln(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$;

b) $y = \sqrt{1 + x}$;

c) $y = \frac{1}{2 + 5x}$.

Úloha 9. Dokážte, že pre každé $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

a) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} (\ln x - \mathcal{H}_n)$;

b) $\left(x^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Úloha 10. * Dokážte *AG*-nerovnosť:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a_n \geq 0)\ \ a_1 \cdot a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n.$$

* – úloha, za správne vyriešenie ktorej získa prvý riešiteľ 1 bonusový bod k priebežnému hodnoteniu