Séria úloh 3: Supremum, infimum množiny

Keď nemám čo robiť, pracujem.

K. Čapek

1. Vyšetrite ohraničenosť nasledujúcich množín:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \dfrac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0 \right\}$

b) $B = \left\{ y \in \mathbb{R};\ y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2} \cdot \sin \dfrac{2^x}{\mathrm{e}^{x-3}} - \dfrac{1}{x^2 + x + 1} \cdot \cos \dfrac{x}{3^x},\ x \in \mathbb{R} \right\}$

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{n^2 + 1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

d) $D = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{3n - 2}{1 - 6n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

e) $F = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = 1 + n^{(-1)^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

f) $G = \left\{ y \in \mathbb{R};\ y = \sin 3x + \cos \dfrac{1}{2^{-x^2}},\ x \in \mathbb{R} \right\}$

2. Ukážte, že žiadne z čísel 1 a 2 nie je supremom množiny

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = \frac{3n + 1}{1 + 2n},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3. Dokážte, že:

a) $\sup \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}},\ n \in \mathbb{N} \right\} = 1,$ b) $\inf \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = 5 - \dfrac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\} = 4.$

4. Nech $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdna ohraničená množina. Dokážte, že $\inf M \leq \sup M$.

5. Ak $M \subseteq \mathbb{R}$ a A má supremum, tak A je neprázdna a zhora ohraničená. Platí takéto tvrdenie?

6. Nájdite maximum, minimum, supremum, infimum (ak existujú) nasledujúcich množín:

a) $\mathfrak{A} = \left\{ x \in \mathbb{R};\ 2x + \sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 \right\}$

b) $\mathfrak{B} = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{6 + n}{3n + 2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

c) $\mathfrak{C} = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{1 + 3n}{3 - 2n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

d) $\mathfrak{D} = \{0{,}5; 0{,}55; 0{,}555; \ldots\}$

e) $\mathfrak{E} = \left\{ y \in \mathbb{R};\ y = \sqrt{1 - x},\ x \in \mathbb{R} \right\}$

f) $\mathfrak{F} = (-3, 1\rangle \cup \langle 10, 15)$

g) $\mathfrak{G} = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{n}{n^2 + 1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

h) $\mathfrak{H} = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{7n - 8}{5 + 2n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

i) $\mathfrak{I} = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = (-1)^n \dfrac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

j) $\mathfrak{J} = \{ x \in \mathbb{R};\ (\exists n \in \mathbb{N})\ \log_x n = n \}$

7. Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny a B je ohraničená množina. Ak $A \subseteq B$, tak $\inf B \leq \inf A$ a $\sup B \geq \sup A$. Dokážte!

8. Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny také, že $(\forall a \in A)(\forall b \in B)\ a \leq b$. Interpretujte nasledujúce tvrdenie: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)(\exists b \in B)\ b - a < \varepsilon$.

9.* Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, $C = A \cup B$ a $D = A \cap B$.

- Nájdite (a dokážte) vzťah medzi $\sup A$, $\sup B$ a $\sup C$.
- Nájdite (a dokážte) vzťah medzi $\sup A$, $\sup B$ a $\sup D$.

10. Nech $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$. Môže sa $\sup A = \sup B$ a $\inf A = \inf B$, ak $A \cap B = \emptyset$?

11. Nech $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdna množina a $M_{\text{abs}} = \{y = |x|; x \in M\}$. Nájdite vzťah medzi supremami a infimami týchto množín!

12.* Pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq \mathbb{R}$ označme

$$A^{\uparrow} = \{x \in \mathbb{R};\ (\forall a \in A)\ x \geq a\}, \quad A^{\downarrow} = \{x \in \mathbb{R};\ (\forall a \in A)\ x \leq a\}.$$

- Dokážte, že ak $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, tak $B^{\uparrow} \subseteq A^{\uparrow}$ a $B^{\downarrow} \subseteq A^{\downarrow}$.
- Čo viete povedať o počte prvkov množiny $A \cap A^{\uparrow}$. A čo množina $A \cap A^{\downarrow}$?
- V akom vzťahu sú množiny A a $(A^{\uparrow})^{\downarrow}$?

13. Dokážte, že zjednotenie konečného počtu ohraničených množín je ohraničená množina. Platí toto tvrdenie pre nekonečný počet ohraničených množín?

14.* Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny a položme

$$\delta(A, B) := \inf\{|a - b|;\ a \in A,\, b \in B\}.$$

a) Pre $A = \mathbb{N}$ and $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ vypočítajte $\delta(A, B)$.

b) Ak A, B sú konečné množiny, akú interpretáciu má číslo $\delta(A, B)$?

c) Nech $B = \langle 0, 1\rangle$. Ako rozumieť tvrdeniu $\delta(\{x\}, B) = 0$ v súvislosti s bodom x?

d) Nech $B = (0, 1)$. Ako rozumieť tvrdeniu $\delta(\{x\}, B) = 0$ v súvislosti s bodom x?

* – úloha, za správne vyriešenie ktorej získa prvý riešiteľ 1 bonusový bod k priebežnému hodnoteniu

✠ Ďalšie príklady môžu záujemcovia nájsť napríklad v odporučenej literatúre

1. Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2, Alfa, Bratislava, 1966.
2. Kulcsár, Š., Kulcsárová, O.: Zbierka úloh z matematickej analýzy I., UPJŠ, 2003.