

Séria úloh 4: Postupnosti reálnych čísel

Najistejšie miesto, kde nájdete pomocnú ruku, je na konci vášho ramena.

M. Twain

1. Nájdite explicitný tvar postupnosti danej rekurentne.

a) $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}$

b) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} a_n, n \in \mathbb{N}$

c) $b_1 = 2, b_{m+1} = 3b_m, m \in \mathbb{N}$

d) $b_1 = -1, b_{m+1} = (m+1)b_m, m \in \mathbb{N}$

2. Vyjadrite rekurentným vzťahom danú postupnosť.

a) $c_k = \frac{k}{k+1}, k \in \mathbb{N}$

b) $c_k = -1 + (-1)^k, k \in \mathbb{N}$

c) $d_m = \sqrt{7^m}, m \in \mathbb{N}$

d) $d_n = n^2 - 1, n \in \mathbb{N}$

3. Vyšetrite ohraničenosť a monotónnosť daných postupností a nájdite ich supremum, infimum, maximum a minimum.

a) $b_m = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{m + 1}, m \in \mathbb{N}$

b) $b_m = (-1)^{m+1} \frac{2m + 3}{m + 7}, m \in \mathbb{N}$

c) $c_k = \frac{1 + 2 + \dots + k}{k^2}, k \in \mathbb{N}$

d) $c_k = 2^{\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}$

e) $d_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}$

f) $d_n = \frac{1}{2}(1 - \cos n\pi), n \in \mathbb{N}$

g) $a_n = \frac{n^2 - 1}{10n}, n \in \mathbb{N}$

h) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$

i) $s_i = (-1)^i \left(1 - \frac{1}{i}\right), i \in \mathbb{N}$

j) $s_i = \cos\left(i + \frac{1}{i}\right), i \in \mathbb{N}$

k) $e_k = \frac{k^2 + 24}{k + 1}, k \in \mathbb{N}$

l) $e_k = \frac{4 - k^2}{k^2}, k \in \mathbb{N}$

m) $f_\ell = \frac{\ell!}{\ell^\ell}, \ell \in \mathbb{N}$

n) $f_\ell = \sin \frac{\pi\ell}{4}, \ell \in \mathbb{N}$

* Ďalšie príklady môžu záujemcovia nájsť napríklad v odporúčenej literatúre

1. ELIÁŠ, J., HORVÁTH, J., KAJAN, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2, Alfa, Bratislava, 1966.
2. HUTNÍK, O., KULCSÁR, Š., KULCSÁROVÁ, O., MOJSEJ, I.: Zbierka úloh z matematickej analýzy III. (Postupnosti reálnych čísel), UPJŠ, 2011.