Séria úloh 5: Limita postupnosti

Lepšie je spýtať sa ako nevedieť.

M. J. Saltykov - Ščedrin

1. Traja študenti Anka, Baška a Cyril sformulovali „svoju“ definíciu limity postupnosti nasledovne:

a) $\underset{n\to\infty}{\textsf{Anka-lim}}\, a_n = a \quad\Leftrightarrow\quad (\forall\varepsilon\in\mathbb{R})(\exists n_0\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}, n>n_0)\ |a_n-a|<\varepsilon;$

b) $\underset{n\to\infty}{\textsf{Baška-lim}}\, b_n = b \quad\Leftrightarrow\quad (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})\ |b_n-b|<\varepsilon;$

c) $\underset{n\to\infty}{\textsf{Cyril-lim}}\, c_n = c \quad\Leftrightarrow\quad (\forall\varepsilon>0)(\forall n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}, n>n_0)\ |c_n-c|<\varepsilon.$

Ktoré postupnosti majú limitu pri takýchto definíciách?

2. Nájdite všetky postupnosti $(x_n)_1^\infty$, ktoré vyhovujú podmienke:

a) $(\exists\varepsilon>0)(\forall n_0\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}, n>n_0)\ |x_n|<\varepsilon;$

b) $(\forall\varepsilon>0)(\forall n_0\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}, n>n_0)\ |x_n|<\varepsilon;$

c) $(\exists\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}, n>n_0)\ |x_n|<\varepsilon.$

3. Dokážte z definície limity postupnosti, že platí:

a) $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{2^m+1}{2^m}=1$

b) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k^2+3k+1}{2k^2+2}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{m}{1-2m}=-\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=0$

e) $\lim\limits_{m\to\infty}\ln\dfrac{m+1}{m+2}=0$

f) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}=0$

g) $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{m}}{1+\sqrt{2m}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2\cos\frac{k!}{3^k}-7k}{k+4}=-7$

4. Vyslovte hypotézu o limite postupnosti

$$b_m=\frac{(-1)^m+\sin m!}{3m+4},\quad m\in\mathbb{N}.$$

Svoju hypotézu dokážte pomocou definície limity postupnosti a určte, ktoré členy postupnosti $(b_m)_1^\infty$ sú od limity vzdialené o menej ako 0,017.

5. Dokážte z definície limity postupnosti, že platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+3}\neq 3$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n}\neq 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-2}{5-10n}\neq -1$

6. Vypočítajte (ak existujú) nasledujúce limity postupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+\sqrt{n^3+1}}{n^2+n+1};$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2n^2+1}{3-n^2}\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3n-1}{5n^2+4}\right)\right];$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n};$

č) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^3}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)\right];$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\sqrt{2\pi n}};$

ď) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right);$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}};$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n+1}-\sqrt[3]{n^3-n+1}\right);$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+n+1}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right)$;

ch) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5-2^{-n}+4\cdot 5^{-n}}{3n+2+n\cdot 3^{-n}}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3n-\sqrt{9n^2-10n+1}\right)$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right)$;

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}$;

ľ) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$;

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)$;

ň) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$;

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}}$;

ô) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}$;

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}}$;

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}\right)$;

s) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-1)!-n!}$;

š) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7}{10}+\frac{29}{10}+\cdots+\frac{2^n+5^n}{10^n}\right)$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;

ť) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$, $b>a>0$;

u) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-a^n}{3a^n+1}$, $a>0$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}$.

7. Nájdite všetky čísla $a,b\in\mathbb{R}$ tak, aby platilo:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}+an+b\right)=0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+2}+an+b\right)=0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^a}{n^2+1}+bn\right)=0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^a+1}+bn\right)=0$.