Séria úloh 6: Limita postupnosti

Chcieť nájsť pravdu je zásluha, i keď cestou blúdime.

Ch. Lichtenberg

1. Nech $a \geq b \geq c > 0$ sú reálne čísla. Dokážte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = a$.

2. Vypočítajte (ak existujú) nasledujúce limity postupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\left(\sqrt{a+\frac{1}{n}} - \sqrt{a}\right)\right]$, $a > 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n\sqrt[3]{n^3+n^2} - n^2}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{(k-1)k}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (3^n - 2^n)$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4n]{3n^3}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{an^2}{n+1} - \dfrac{bn^2}{n-1}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n-a} - \dfrac{n^2}{n-b}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 - n^3}{n^2 + n}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt[5^k]{16}$;

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}\right]$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\pi}(-1)^n}{n^2+n+1}$;

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}}{n}$;

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n - 3^{n-2}}$;

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^{\frac{2}{n}}}{n^2} \cdot \cos(n^2+1)\right]$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{4n^2+3n+1} - 2n^2}{n+1}$;

s) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{13}{36} + \cdots + \dfrac{3^n + 2^n}{6^n}\right)$.

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

u) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{2+n^5} - \sqrt{2n^3+3}}{(n+\sin n)\sqrt{7n}}$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$;

w) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$;

x) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$;

y) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{1 - \sqrt[3]{n}}$;

z) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - n}$;

dz) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(\sqrt{n})$;

α) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n} - n)$;

β) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 - 5n}{n^2 - 3n + 1}$;

ε) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$;

ζ) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n+5}}$;

η) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n}{2n^2-1} \cos \dfrac{n+1}{2n-1}\right)$;

ϑ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{n^7+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[5]{n^7} - 1}$;

κ) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$;

λ) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$;

μ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + \cos(n!)}{3n+4}$; ν) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/n} + \sin\frac{n}{n^2+1} \cdot \cos n}{1+\cos\frac{1}{n}}$.

3. Z definície dokážte, že:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7-n^2}{n} = -\infty$; b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = +\infty$;

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (2-n^3) = -\infty$; d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n^2+\ln n) = +\infty$;

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n-1}} = +\infty$; f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-\sqrt[3]{n}) = -\infty$;

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty$; h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{10^{\ln n}} = +\infty$.

4. Dokážte, že pre každú postupnosť $(a_n)_1^\infty$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(a_n) = +\infty$.

5. Dokážte, že nasledujúce rekurentne zadané postupnosti sú konvergentné a nájdite ich limity.

a) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $a_1 = 2$; b) $5b_{n+1} = b_n^2 + 6$, $b_1 = 0$;

c) $c_{n+1} = \sqrt{2+c_n}$, $c_1 = \sqrt{2}$; d) $d_{n+1} = \frac{1}{1+d_n}$, $d_1 = 1$.

6.* Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku pre postupnosť $(a_n)_1^\infty$, aby

$$\mathrm{E}\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(a_n).$$

Dohoda: $\mathrm{E}(+\infty) = +\infty$ a $\mathrm{E}(-\infty) = -\infty$.

7. Určte konštanty $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tak, aby

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-n^2} - an - b\right) = 0$;

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4-n^2+1} - (a+b)n^2 - (c+d)\right) = 0$ a súčasne
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+n^2+1} - (a-b)n^2 - (c-d)\right) = 0$.

* Ďalšie príklady môžu záujemcovia nájsť napríklad v odporučenej literatúre

1. Demidovič, B. P.: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, Praha, 2003.
2. Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2, Alfa, Bratislava, 1966.
3. Hutník, O., Kulcsár, Š., Kulcsárová, O., Mojsej, I.: Zbierka úloh z matematickej analýzy III. (Postupnosti reálnych čísel), UPJŠ, 2011.