Séria úloh 6 a 1/2: Limita postupnosti – dodatočné úlohy

1. Vypočítajte (ak existuje) limitu:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{2n-1}\right)^n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-5n^4+5n^3+7n-1}{2n^3-4n+1}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(-1)^n n^3-2n+1}{n^3+n^2+4}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3k}{n^2}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)\cos 2^{\sqrt{n}}}{(n+2)(n^2+1)}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}\left(\dfrac{n^2}{n+1}\right)$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2\dfrac{n^{2021}}{n+1}+\cos^2\dfrac{n^{2021}}{n+1}}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^2+2^2+\cdots+n^2}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4n]{\dfrac{(n+2)\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{3n}\right)}{n+1}}$;

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{n}}{n}$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-2n\sqrt{n^2+n}+n\sqrt{n^2+2n}\right)$;

n) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}-\sqrt[2k+1]{2}\right)$;

o) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n^{12}}+\dfrac{\sqrt[n]{\pi}\sin 2^n}{n^2-2n}-\dfrac{1-2n}{4-2n}\right)$

p) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n-5^{n-1}}$;

q) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty}\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{n^k}$;

s) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-4}\right)\right]^2$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n^{2^n}+\cos 2^{n^n}}{1+2+\cdots+n}$;

u) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}}\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)\right)$;

v)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{E}\left(\sqrt[3]{\mathrm{E}(\sqrt{n})}\right)}{\sqrt[6]{n}}$;

w) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!}{2(n+2)!+(n-1)!}$;

x)* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n+1}\dfrac{1}{n^2+k}$;

y) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^{\frac{11}{n}}}{n^2-n+1}\sin(n^2-n+1)\right]$;

z) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{2n}-1\right)^{\frac{1}{n}}$;

ž) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

2. Pre ktoré $x\in\mathbb{R}$ existujú limity postupností $a_n=\sin nx$ a $b_n=\cos nx$, $n\in\mathbb{N}$?

3. Vyberte konvergentnú postupnosť z divergentnej postupnosti $a_n=(-1)^n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2}\right)$, $n\in\mathbb{N}$.

4. Zistite, ktoré z nasledujúcich divergentných postupností majú nevlastnú limitu:

a) $a_n=\dfrac{n^3\cos n\pi}{n^2+2n-1}$;

b) $a_n=\dfrac{n^4-10n^3}{n+5}$;

c) $b_n=-\dfrac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$;

d) $b_n=n^3\cos^2 n\pi$;

e) $c_n = (1-\sqrt{n})^2$;

f) $c_n = \sin \dfrac{2\pi n}{3}$;

g) $d_n = n^{(-1)^n}$;

h) $d_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$;

i) $e_n = \dfrac{n}{n+1} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

✠ Teoretické úlohy

(T$_1$) Ktoré z nasledujúcich tvrdení sú ekvivalentné s tým, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$?

(a) $(\forall p \in \mathbb{N})(\exists \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)$

(b) $(\exists n_0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall n, p \in \mathbb{N})\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)$

(c) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \{1,2,3,4\})\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)$

(d) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3,4\})\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)$

(e) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n, p \in \mathbb{N})\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_{n+2p} - a_n| < \varepsilon)$

(f) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ (n \geq n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon)$

(T$_2$) Je možné vybrať z postupnosti $(a_n)_1^\infty$ nekonečne veľa členov postupností tak, aby každý člen postupnosti $(a_n)_1^\infty$ bol členom nanajvýš jednej podpostupnosti?

(T$_3$) Majme danú postupnosť $(a_n)_1^\infty$ a skonštruujme z nej novú postupnosť $(b_n)_1^\infty$ pomocou jednej z nasledujúcich úprav:

(i) vyhodíme z $(a_n)_1^\infty$ konečne veľa členov;

(ii) pridáme do $(a_n)_1^\infty$ konečne veľa členov;

(iii) vyhodíme z $(a_n)_1^\infty$ nekonečne veľa členov;

(iv) pridáme do $(a_n)_1^\infty$ nekonečne veľa členov;

(v) vyhodíme z $(a_n)_1^\infty$ každý párny člen;

(vi) pridáme do $(a_n)_1^\infty$ číslo 0 medzi každé dva členy;

(vii) poprehadzujeme konečne veľa členov.

Rozhodnite, ktorá z týchto operácií bude mať vplyv na konvergenciu postupnosti $(b_n)_1^\infty$ v závislosti na konvergencii postupnosti $(a_n)_1^\infty$.

(T$_4$) Rozhodnite o platnosti nasledujúcich výrokov:

- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(n, +\infty) = \emptyset$
- Každá aritmetická postupnosť je divergentná.
- Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_{4n} = a$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$.