Séria úloh 7: Úvod k nekonečným číselným radom

Pracuj len, radosť príde sama od seba.

J. W. Goethe

1. Riešte v $\mathbb{R}$:

   a) $\log x + \log \sqrt[3]{x} + \log \sqrt[9]{x} + \log \sqrt[27]{x} + \cdots = 6$;

   b) $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x - \cdots = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x}$;

   c) $2^x \cdot \sqrt{2^x} \cdot \sqrt[4]{2^x} \cdot \sqrt[8]{2^x} \cdots = 0{,}25$.

2. Vyjadrite v tvare zlomku v základnom tvare číslo $3{,}\overline{123}$.

3. Nájdite n-tý člen radu, ak sú všetky členy radu vytvorené podľa toho istého pravidla:

   a) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \ldots$;

   b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30} - \dfrac{1}{42} + \ldots$;

   c) $1 - \dfrac{5}{6} + \dfrac{8}{18} - \dfrac{11}{54} + \ldots$.

4. Nájdite n-tý čiastočný súčet nekonečného radu a rozhodnite o jeho konvergencii:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$;

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$;

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$;

   g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

   h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\alpha}{2^{n+1}} \cos\frac{3\alpha}{2^{n+1}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

   i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{6^n}$;

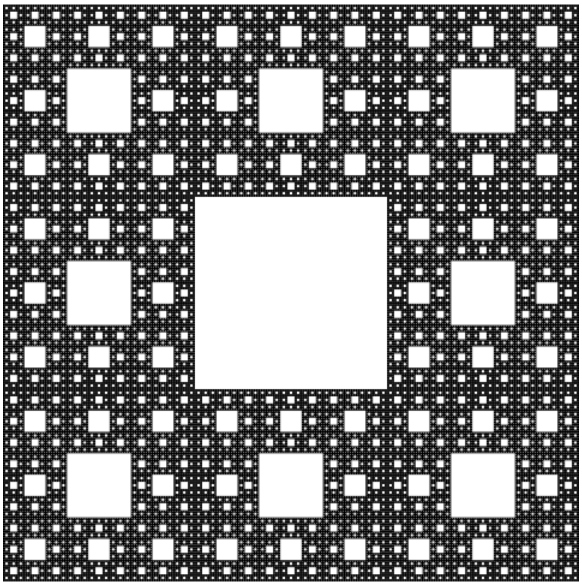
   j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-3n}$.

5. Riešte rovnicu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 3$.

6. Riešte nerovnicu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(x^2+2)^n} > 5$.

7.* Pomocou vzťahu $\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n$ rozhodnite, koľko členov harmonického radu je potrebné sčítať, aby $s_n > 100$.

8.* Uvažujme jednotkový štvorec. Tento štvorec rozdelíme štyroma úsečkami na deväť štvorcov, prostredný štvorec odoberieme. Každý zo zostávajúcich štvorcov opäť rozdelíme na deväť štvorcov a prostredné štvorce odstránime. Takto postupujeme ďalej nekonečne veľakrát. Vzniknutý útvar sa nazýva *Sierpińského* koberec* (pozri obrázok nižšie). Určte jeho obsah.



Obr. 1: Sierpińského koberec (prvých 5 iterácií)

*Wacław Franciszek SIERPIŃSKI (1882–1969) bol poľský matematik zaoberajúci sa prevažne teóriou množín, teóriou čísel a topológiou. Jeho meno nesú dnes tri fraktálne objekty: Sierpińského trojuholník, Sierpińského koberec a Sierpińského krivka.