Séria úloh 8: Limita funkcie

Ak ľudia neveria, že matematika je jednoduchá, je to iba tým, že si neuvedomujú, ako je život komplikovaný.

John von Neumann

1. Zapíšte ako kvantifikovaný výrok: bod $b \in \mathbb{R}^*$ nie je hromadný bod množiny $M \subset \mathbb{R}$.

2. Nech bod $x_0 = 0$ je hromadný bod množiny D_f. Zapíšte ako kvantifikovaný výrok:

   a) číslo 4 nie je limitou funkcie f v bode x_0;

   b) funkcia f nemá v bode x_0 limitu.

3. Dokážte z definície limity funkcie, že:

   a) $\lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4$;
   b) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1) = 2$;
   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{3x-1} = \dfrac{2}{3}$;
   d) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$, $a > 1$;
   e) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$;
   f) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x) = 0$;
   g) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$;
   h) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$;
   i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = 1$;
   j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$;
   k) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-1}{(x+1)^2} = -\infty$;
   l) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$;
   m) $\lim\limits_{x\to 4}(x-2\sqrt{x}) = 0$;
   n) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+x) = 0$;
   o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a^2+6x^2}-a}{x^2} = \dfrac{3}{a}$, $a > 0$;
   p) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x+1}{2x^2-1} = \dfrac{1}{2}$;
   q) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-x-a^2}{x+a} = -\dfrac{1}{2}$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
   r) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0$;

4. Vypočítajte nasledujúce limity funkcií:

   a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$;
   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;
   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$;
   d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$, $a \in \mathbb{R}$;
   e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$;
   f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$;
   g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5-x^4}{\sqrt[3]{1+x^4}-1}$;
   h) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$;
   i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x^2-x}{x^2-3} - \dfrac{3x^3-4}{x^3-x}\right)^4$;
   j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+3)(x+4)(x+8)}{x^4+x-11}$;
   k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}{x-1}$;
   l) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$;
   m) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$;
   n) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$;

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

p) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\right]$;

r) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3\sqrt{x^2+4}}{2x}$;

s) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$;

t) $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{x^3-8}{x(x^2-4)}-\dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-16}\right]$;

u) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$;

v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$;

w)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x+1)^{20}(2x+1)^{10}}{(2x-1)^{30}}$;

x) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$, $n\in\mathbb{N}$;

y)* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$, $a\in\mathbb{R}$.