

# Séria úloh 9: Limity funkcie (goniometrické, exponenciálne)

Všetky myšlienky, ktoré majú ďalekosiahle dôsledky, sú vždy prosté.

Lev Nikolajevič Tolstoj

1. Vypočítajte nasledujúce limity funkcií:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x};$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x};$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( 2 + \sqrt{\arctg x \cdot \sin \frac{1}{x}} \right);$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x};$

k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{\pi}{x};$

m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x};$

o)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x;$

q)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x};$

s)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x};$

š)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1 + x} - 1)};$

u)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)^{E(x)}}{x - 2};$

w)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)^{E(x)} \cos x}{x^2};$

y)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{-x} \cos 5x;$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \operatorname{sgn}(x - 1);$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{cotg} x;$

f)\*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( 2\pi \sqrt{n^2 + 1} \right);$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) - 1}{x};$

j)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin 2x};$

l)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin \left( \sqrt{2x^2 - 3x - 5} - \sqrt{1 + x} \right)}{\ln(x - 1) - \ln(x + 1) + \ln 2};$

n)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}, m, n \in \mathbb{N};$

p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + x) - \sin(a - x)}{x}, a \in \mathbb{R};$

r)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - x)}{\sqrt{x} - 1};$

t)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$

ť)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{E(x)}{x};$

v)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 3}{|2x - 4|};$

x)  $\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^{E(x)} \cdot \frac{x^2 + 2x + 2 \sin \frac{x}{2}}{x^2 + 1};$

z)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 7}{x^2 - 5x + 8};$

2. Vypočítajte nasledujúce limity funkcií:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 3} \right)^x;$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{cosec}^2 x};$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x - 1};$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x + 3}{x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{x}};$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x};$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2};$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}};$

h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 4}{3x^3 - 5} \right)^{x^2};$

ch)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ;

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x)^{\frac{1}{x}}$ ;

j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3 + 2x}{2 + 5x} \right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$ ;

k)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{5}^+} \left( \frac{3 - 2x}{2 + 5x} \right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$ ;

p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\operatorname{cosec} x}$ ;

q)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1 + x}{2 + x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{2+x}}$ ;

r)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2}$ ;

s)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x+2} \right)^x$ ;

t)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x + e^x)$ ;

u)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 4}{3x^2 - 5} \right)^{x^2}$ ;

3. Vypočítajte nasledujúce limity funkcií:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}$ ,  $a > 0$ ;

d)\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \ln \sqrt{|x| + \sin x} - \ln \sqrt{2|x|} \right)$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin x}{x}$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sinh x}{\operatorname{arctg} x}$ ;

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{a} - 1)$ ,  $a > 0$ ;

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sinh x}$ ;

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \arcsin x}{\cos x - \cos 3x}$ ;

k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}$ ;

l)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cotg x}}$ ;

m)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})}$ ;

n)\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$ ;

o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}$ ;

p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}$ ;

q)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ ;

r)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-3}}$ ;

s)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sqrt[4]{1+x^2} - 1}$ ;

t)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$ ;

u)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg} a}}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin a}}$ ;

v)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x - 3x^2 + 4x^3)}{\ln(1 - x + 2x^2 - 7x^3)}$ .

4. Nájdite  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + x} - ax - b \right) = 0$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$ .

5.\* Určte, v ktorých bodoch  $x_0 \in \mathbb{R}$  existujú limity

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x\chi(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 - 1)\chi(x),$$

kde  $\chi$  je Dirichletova funkcia.