Séria úloh 1

Metrické priestory: metrika, topologické pojmy

16. 2 2022

Príklad 1. *Nájdite predpis nasledujúcich metrík na množine* $(0,1)$. *Rozhodnite o úplnosti daného metrického priestoru. Ako vyzerá množina* $\mathrm{B}(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$ *v jednotlivých metrických priestoroch?*

a) Euklidovská metrika.

b) Diskrétna metrika.

c) Euklidovská metrika množiny $(100,200)$.

d) Euklidovská metrika množiny $(2016,\infty)$.

e) Euklidovská metrika množiny $(10,20]$.

f) Euklidovská metrika množiny $[2016,\infty)$.

g) Euklidovská metrika množiny $\mathbb{R}$.

h) Metrika, ktorá vznikne ako mnimum Euklidovskej metriky a $\frac{1}{2}$.

Príklad 2. *Uvažujme množinu* $X=\{O,A,B,C\}$ *a zobrazenie* $d:\ X\times X\to\mathbb{R}$ *definované nasledujúcimi rovnosťami:*

$$d(A,B)=d(B,C)=d(C,A)=1,$$
$$d(O,A)=d(O,B)=d(O,C)=\xi.$$

a) Pre ktoré hodnoty $\xi>0$ je funkcia d metrika?

b) Ak $\xi=\frac{1}{2}$, môže byť X podpriestorom priestoru $\mathbb{R}^3$ s euklidovskou metrikou?

c) Ak $\xi=\frac{4}{7}$, môže byť X podpriestorom priestoru $\mathbb{R}^3$ s euklidovskou metrikou?

d) Ak $\xi=\frac{1}{2}$, môže byť X podpriestorom priestoru $\mathscr{C}[0,1]$ s metrikou $\rho:\ \mathscr{C}[0,1]\times\mathscr{C}[0,1]\to\mathbb{R}$ definovanou rovnosťou $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$?

e) Ak $\xi=\frac{4}{7}$, môže byť X podpriestorom priestoru $\mathscr{C}[0,1]$ s metrikou $\rho:\ \mathscr{C}[0,1]\times\mathscr{C}[0,1]\to\mathbb{R}$ definovanou rovnosťou $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$?

Príklad 3. *Rozhodnite, či v Euklidovom priestore sú nasledujúce množiny otvorené alebo uzavreté a nájdite ich všetky hromadné body (deriváciu množiny), vnútorné body (vnútro množiny), hraničné body (hranicu množiny) a izolované body.*

a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n \dfrac{n}{n+1},\ y = 3,\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n \dfrac{2n-2}{5n+3},\ y = m,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = k,\ y = k^2 \vee x = k,\ y = k^2 - \dfrac{1}{n},\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

d) $E = \mathbb{Q}^2$;

e) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x \leq 1,\ y + 2x = 4\}$;

f) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 5x = k,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

g) $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x,y\} = 2,\ x \neq y\}$;

h) $CH = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < \dfrac{1}{y}\right\}$;

ch) $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y^3\}$;

i) $J = (2,3] \times [-5,6]$;

j) $K = \left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \times [-5,6]$;

k) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \sin x,\ y > 0\}$;

l) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \leq y \leq -x + 3,\ 1 < x \leq 2\}$;

m) $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3,\ x \notin \mathbb{Z},\ y \notin \mathbb{Z}\}$;

n) $O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| \leq 2,\ 1 \leq |y| \leq 2\}$;

o) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$;

p) $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x| \leq 2,\ 1 \leq |y| \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$;

q) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| + |y| < 2,\ y \neq 1\}$;

r) $S = (2,5] \times (0,2)$;

s) $T = (2,5] \times [0,2)$;

t) $U = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$;

u) $V = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.

v) $W = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

w) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

Príklad 4. *Rozhodnite, či je množina $P \subseteq M$ otvorená alebo uzavretá v metrickom priestore (M, σ) a nájdite jej všetky hromadné body (deriváciu množiny), vnútorné body (vnútro množiny), hraničné body (hranicu množiny) a izolované body.*

a) $P = \{[2,3]\}$, $M = \mathbb{R}^2$, σ - Euklidovská metrika

b) $P = \{[2,3]\}$, $M = \{[2,3]\}$, σ - Euklidovská metrika

c) $P = (5,7) \times [2,3]$, $M = \mathbb{R}^2$, σ - Euklidovská metrika

d) $P = (5,7) \times [2,3]$, $M = [5,7] \times [2,3]$, σ - Euklidovská metrika

e) $P = (5,7) \times [2,3]$, $M = [5,7) \times [2,3]$, σ - Euklidovská metrika

f) $P = (5,7) \times [2,3]$, $M = (5,7) \times [2,3]$, σ - Euklidovská metrika

Príklad 5. *Vypíšte všetky obojaké množiny (i otvorená i uzavretá množina) nasledujúcich metrických priestorov. $\rho_{\mathbb{E}^n}$ označuje metriku n-rozmerného Euklidovského priestoru.*

a) $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{E}^1})$,

b) $([-1,1], \rho_{\mathbb{E}^1})$

c) $((-\infty,0) \cup (0,\infty), \rho_{\mathbb{E}^1})$

d) $\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \rho_{\mathbb{E}^1} \right)$

e) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{E}^1})$

f) $(((0,2) \cup (3,4))^2, \rho_{\mathbb{E}^2})$

g) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \rho_{\mathbb{E}^2})$

h) $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \rho_{\mathbb{E}^2})$

Príklad 6. *Rozhodnite, či množina P je riedka, hustá, prvej kategórie alebo druhej kategórie v metrickom priestore $(M, \rho_{\mathbb{E}^n})$, kde $\rho_{\mathbb{E}^n}$ označuje metriku n-rozmerného Euklidovského priestoru.*

a) $P = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$, $M = \mathbb{R}^2$, $n = 2$

b) $P = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{R}$, $n = 1$

c) $P = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{R}$, $n = 1$

d) $P = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^2$, $n = 2$

e) $P = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1) \right) \times \{1\}$, $M = \mathbb{R}^2$, $n = 2$

f) $P = \mathbb{R}^2 \times \{2\}$, $M = \mathbb{R}^3$, $n = 3$

g) $P = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{R}$, $n = 1$

h) $P = \{1\}$, $M = \{1\}$, $n = 1$

Príklad 7. *Nech X je neprázdna množina. Na množine ${}^{\mathbb{N}}X$ všetkých nekonečných postupností prvkov množiny X definujeme Bairovu metriku predpisom*

$$\rho(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \alpha \neq \beta \wedge n = \min\{k;\ \alpha(k) \neq \beta(k)\} \\ 0 & \textit{ináč.} \end{cases}$$

a) Ukážte, že ρ je metrika.

b) Ukážte, že ρ je ultrametrika, t.j. $\rho(\alpha,\beta) \leq \max\{\rho(\alpha,\gamma); \rho(\gamma,\beta)\}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta, \gamma \in {}^{\mathbb{N}}X$.

c) Popíšte otvorené gule v priestore $({}^{\mathbb{N}}X, \rho)$.

d) Popíšte uzavreté gule v priestore $({}^{\mathbb{N}}X, \rho)$.

e) Ukážte, že množina $B(\alpha, r)$ pre $\alpha \in {}^{\mathbb{N}}X$ a $r > 0$ je obojaká množina, t.j. i otvorená i uzavretá.

f) Ak $X = \mathbb{N}$, tak priestor $({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}, \rho)$ sa nazýva Bairov priestor. Ukážte, že postupnosť $\langle \alpha_n;\ n \in \mathbb{N}]$, kde

$$\alpha_n(k) = \begin{cases} 2 & k < n, \\ 5 & n \leq k \end{cases}$$

konverguje ku konštantnej postupnosti s hodnotou 2.

g) Ak $X = \{0, 1\}$, tak priestor $({}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}, \rho)$ sa nazýva Cantorov priestor. Ukážte, že postupnosť $\langle \alpha_n;\ n \in \mathbb{N}]$, kde

$$\alpha_n(k) = \begin{cases} 0 & k < n, \\ 1 & n \leq k \end{cases}$$

konverguje ku konštantnej postupnosti s hodnotou 0.

h) Nájdite netriviálnu postupnosť funkcí Cantorovho priestoru, ktorá konverguje k funkcii α, kde

$$\alpha(k) = \begin{cases} 0 & 2/k, \\ 1 & \text{ináč.} \end{cases}$$

i) Je množina $\{\alpha \in {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\};\ \alpha(n) = 0\}$ pre fixné $n \in \mathbb{N}$ otvorená alebo uzavretá?

j) Je množina $\{\alpha \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N};\ \alpha(n) = 10\}$ pre fixné $n \in \mathbb{N}$ otvorená alebo uzavretá?

k) Nech $a \in X$. Ukážte, že množina

$$\{\alpha \in {}^{\mathbb{N}}X;\ (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \to \alpha(n) = a)\}$$

je hustá množina v priestore $({}^{\mathbb{N}}X, \rho)$.

l) Ukážte, že množina $\{\alpha \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N};\ (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ \alpha(n) = k\}$ je riedka v Bairovom priestore.

m) Ukážte, že zobrazenie $f :\ {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\} \times {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\} \to {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ definované ako $f(\alpha, \beta)(n) = \min\{\alpha(n) + \beta(n); 1\}$, je spojité.

Príklad 8. *Majme Hilbertovu kocku, t.j. metrický priestor* $({}^{\mathbb{N}}[0, 1], \sigma)$*, kde*

$$\sigma(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} |\alpha(m) - \beta(m)|.$$

a) Ukážte, že $({}^{\mathbb{N}}[0, 1], \sigma)$ je metrický priestor.

b) Ukážte, že postupnosť $\langle \alpha_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$, kde $\alpha_n(k) = \frac{1}{n}$ pre $k < n$ a $\alpha_n(k) = 1$ pre $k \geq n$ konverguje k nulovej postupnosti.

c) Nájdite netriviálnu postupnosť Hilbertovej kocky, ktorá konverguje ku konštantnej postupnosti s hodnotou 1.

Príklad 9. *Nech* M *označuje množinu ohraničených integrovateľných funkcí na množine* $[-1, 1]$.

a) Je funkcia d_1 definovaná ako $d_1(f, g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|\ \mathbf{d}t$ metrika na M? Ako sa zmení situácia, keď uvažujeme množinu $\mathscr{C}[-1, 1]$?

b) Je funkcia funkcia d_2 definovaná ako $d_2(f,g) = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} |f(t)-g(t)|^2 \,\mathbf{d}t}$ metrika na M? Ako sa zmení situácia, keď uvažujeme množinu $\mathscr{C}[-1,1]$?

c) Je funkcia funkcia d_∞ definovaná ako $d_\infty(f,g) = \sup\{|f(t)-g(t)|;\ -1 \le t \le 1\}$ metrika na M?

d) Vypočítajte vzdialenosť funkcií F a G v jednotlivých metrikách, kde $F:\ y = x$ a $G:\ y = x^2$.

e) Vypočítajte vzdialenosť funkcií F a G v jednotlivých metrikách, kde $F:\ y = \lfloor x \rfloor$ a $G:\ y = \sin x$.

Majme postupnosť $\langle f_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ funkcií z M definovanú predpisom

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{n} < |t| \le 1, \\ 1+nt & -\frac{1}{n} \le t \le 0, \\ 1-nt & 0 \le t \le \frac{1}{n}. \end{cases}$$

f) Nájdite bodovú limitu postupnosti $\langle f_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$.

g) Zistite, či je postupnosť $\langle f_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ konvergentná v metrikách d_1, d_2 a d_∞.

h) Vypočítajte vzdialenosti $d_1(f_n,f_m)$, $d_2(f_n,f_m)$ a $d_\infty(f_n,f_m)$.

i) Nájdite postupnosť funkcií $\langle g_n^1;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ takú, že $d_1(g_n^1, g_{n+1}^1) = \frac{1}{n}$.

j) Nájdite postupnosť funkcií $\langle g_n^2;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ takú, že $d_2(g_n^2, g_{n+1}^2) = \frac{1}{n}$.

k) Nájdite postupnosť funkcií $\langle g_n^\infty;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ takú, že $d_\infty(g_n^\infty, g_{n+1}^\infty) = \frac{1}{n}$.

V ďalšom uvažujme metriky d_1, d_2 d_∞ na množine $\mathscr{C}[-1,1]$.

l) Graficky znázornite množinu $B_{d_\infty}(f_a;\varepsilon)$, kde $f_a(x) = a$ pre $x \in [-1,1]$.

m) Popíšte nekonečne veľa funkcií z množiny $B_{d_\infty}(f_a;\varepsilon) \setminus B_{d_1}(f_a;\varepsilon)$.

n) Popíšte nekonečne veľa funkcií z množiny $B_{d_1}(f_a;\varepsilon) \setminus B_{d_\infty}(f_a;\varepsilon)$.

o) Je množina $\{f_a;\ a \in \mathbb{Q}\}$ hustá v niektorom z priestrov $(\mathscr{C}[-1,1], d_1)$, $(\mathscr{C}[-1,1], d_2)$ alebo $(\mathscr{C}[-1,1], d_\infty)$?

p) Popíšte nekonečne veľa funkcií z množiny $B_{d_1}(f_a;\varepsilon) \cap B_{d_\infty}(f_a;\varepsilon)$.

q) Nájdite homeomorfizmus (bijekcia, ktorá je spojitá i k nej inverzná funkcia je spojitá) z priestorov $(\{f_a;\ a \in \mathbb{R}\}, d_1)$, $(\{f_a;\ a \in \mathbb{R}\}, d_2)$, $(\{f_a;\ a \in \mathbb{R}\}, d_\infty)$ do priestoru $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{E}^1})$.

r) Nájdite iné podpriestory priestorov $(\mathscr{C}[-1,1], d_1)$, $(\mathscr{C}[-1,1], d_2)$, $(\mathscr{C}[-1,1], d_\infty)$, ktoré sú homeomorfné s priestorom $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{E}^1})$.

s) Rozhodnite o uzavretosti a otvorenosti množiny $\{f \in \mathscr{C}[-1,1];\ f(0) = 1\}$ v priestoroch $(\mathscr{C}[-1,1], d_1)$, $(\mathscr{C}[-1,1], d_\infty)$.

t) Ukážte, že žiadny bod množiny $\{f \in \mathscr{C}[-1,1];\ f(0) = f(1)\}$ nie je vnútorným v priestore $(\mathscr{C}[-1,1], d_\infty)$.

u) Nájdite uzáver a množinu všetkých hraničných bodov množiny $\{f \in \mathscr{C}[-1,1];\ f(0) = f(1)\}$ v priestore $(\mathscr{C}[-1,1], d_\infty)$.

Príklad 10. *Pre každé $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definujme funkciu $||\cdot||$ ako*

$$||n|| = \frac{1}{\max\{k \in \mathbb{N};\ 1/n \wedge \cdots \wedge k/n\}}$$

a $||0|| = 0$. Dokážte nasledujúce tvrdenia.

a) Funkcia d definovaná ako $d(x,y) = ||x-y||$ je metrika na $\mathbb{Z}$.

b) $\mathcal{H}(d) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$.

c) Ak $\frac{1}{n+1} < r \leq \frac{1}{n}$, tak $B(a;r) = B(a;\frac{1}{n+1})$.

d) Ak $1 < r$, tak $B(a;r) = \mathbb{Z}$.

e) Ak $b \in B(0;\frac{1}{n})$, tak $1/b, \ldots, n/b$.

f) Ak $1/b, \ldots, n+1/b$, tak $b \in B(0;\frac{1}{n})$.

g) $n! \in B(0;\frac{1}{n-1})$.

h) $B(a;r) = a + B(0;r)$, kde $a + M = \{a+b;\ b \in M\}$.

i) $a + b\mathbb{Z} \subseteq B(a;r)$ pre $b \in B(0;r)$, kde $a + b\mathbb{Z} = \{a + bn;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

j) $a + n!\mathbb{Z} \subseteq B(a;\frac{1}{n-1})$.

k) $\{n!\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 0$, $\{2^n n!\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 0$, $\{5 + (n!)^n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 5$, $\{2 + 2n!\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 2$, $\{2 + 3n!\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 2$.

l) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 0$ práve vtedy, keď

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_k \to k/n).$$

m) Postupnosti $\{2^{n!}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{3^{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ nekonvergujú k 0.

n) Množina $a + b\mathbb{Z}$ je obojaká pre ľubovoľné $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

o) Žiadna množina obsahujúca aspoň dva rôzne body nie je súvislá.

p) $B(a;\frac{1}{n!}) \subseteq a + n!\mathbb{Z} \subseteq B(a;\frac{1}{n+1})$.

Literatúra

[1] Bukovský L., The Structure of the Real Line, Monogr. Mat., Springer-Birkhauser, Basel, 2011.

[2] Doboš J., „BABY" FUNKCIONÁLNA ANALÝZA, elektronický dokument k cvičeniam z Funkcionálnej analýzy, UPJŠ Košice, 2016.

[3] Lovas L., Mezö I., *On an exotic topology of the integers*, http://arxiv.org/abs/1008.0713.

[4] Mojsej I., PRÍKLADY KU PREDMETU MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 PRE INFORMATIKOV A FYZIKOV, elektronický dokument k cvičeniam z predmetu ÚMV/MAN3b/10, UPJŠ Košice, 2012.

[5] Šalát T., Metrické priestory, Alfa, Bratislava, 1981.

[6] http://zeus.elf.stuba.sk/Katedry/KM/predmety/ufa/prikl1.pdf.